

مقاومت مصالح (ویژه کنکور کارشناسی ارشد عمران)

۲	۱- مقدمه
۳	۲- تنش و کرنش
۹	۳- بارگذاری محوری
۱۸	۳-۱- خطای ساخت
۲۲	۳-۲- تغییر شکل محوری میله های مایل
۳۰	۳-۳- بارگذاری محوری متغیر در طول عضو
۳۴	۴- تغییر شکل محوری سازه های نامعین
۳۷	۵- ضریب پواسون
۴۷	۶- حرارت
۵۹	۷- دایره مورتنش (2D)
۷۵	۸- دایره مورتنش (3D)
۷۸	۸-۱- تانسور تنش
۷۹	۹- دایره مور کرنش
۸۳	۱۰- گلبیگ کرنش
۸۴	۱۱- مخازن
۸۹	۱۲- پیچش
۸۹	۱۲-۱- مقطع دایروی
۹۰	۱۲-۲- مقاطع جدارنازک بسته
۹۰	۱۲-۳- مقاطع جدار نازک باز
۹۹	۱۲-۴- سهم مقطع از پیچش
۱۰۴	۱۲-۵- مقاومت پیچشی
۱۱۱	۱۲-۶- اتصالات تحت اثر پیچش
۱۱۷	۱۲-۷- تحلیل سازه های تحت پیچش
۱۲۶	۱۲-۸- مقاطع غیر دایروی
۱۲۷	۱۳- خمش
۱۴۰	۱۳-۱- ظرفیت خمشی
۱۴۲	۱۳-۲- تیر بر روی بستر صلب
۱۴۴	۱۳-۳- سهم لنگر
۱۴۷	۱۳-۴- خمش دو محوره
۱۵۱	۱۳-۵- ترکیب خمش با نیروی محوری
۱۵۵	۱۳-۶- خمش دو محوره همراه با نیروی محوری
۱۵۹	۱۳-۷- ترکیب خمش و پیچش
۱۶۰	۱۳-۸- مقاطع مرکب
۱۶۶	۱۳-۹- شعاع انحنا
۱۷۵	۱۳-۱۰- آنالیز ابعادی
۱۷۸	۱۳-۱۱- هسته خمش
۱۸۱	۱۳-۱۲- لنگر پلاستیک
۱۸۵	۱۴- بار گذاری عرضی (برش)
۱۸۵	۱۴-۱- تنش برشی در مقطع توپر
۱۹۰	۱۴-۲- جریان برش در مقاطع جدارنازک
۱۹۴	۱۴-۳- تنش در مقاطع جدارنازک
۲۰۰	۱۴-۴- اتصال با میخ
۲۰۴	۱۴-۵- تنش برشی در مقاطع با عرض متغیر
۲۰۷	۱۴-۶- مرکز برش
۲۱۲	۱۴-۷- ترکیب برش، پیچش و خمش
۲۱۵	۱۴-۸- سهم برش
۲۱۶	۱۴-۹- تغییر شکل برشی
۲۱۷	۱۵- مدل سازی با فنر
۲۲۵	۱۶- کمانش
۲۲۵	۱۶-۱- کمانش ستون صلب
۲۲۶	۱۶-۲- کمانش ستون الاستیک

۱-مقدمه

داوطلب گرامی ضمن آرزوی پیروزی برای شما قبل از استفاده از جزوه مطالب زیر را مطالعه بفرمایید:

- ✓ این جزوه جهت تدریس سرکلاسی و افزایش سرعت تدریس تهیه شده و بنابراین کامل نیست! برخی از مطالب توضیح داده نشده و پاسخ برخی تستها ناقص است. داوطلبان کنکور بهتر است از منابع مختلفی که موجود است نیز استفاده کنند: کتاب مرجع: مقاومت مصالح جانستون
- کتاب تست: ۱- مقاومت مصالح دکتر عرفانی انتشارات گاج ۲- کتاب مقاومت مصالح با نظارت علمی دکتر فنایی انتشارات سیمای دانش- سری عمران ۳- کتاب جامع مقاومت مصالح دکتر فنایی انتشارات راهیان ارشد (این کتاب درسنامه کمتری دارد و برای کسانی مناسب است که نیاز به تست های بیشتر و سنگین تر دارند).
- ✓ این جزوه در فرصت های مناسب ویرایش و کامل تر خواهد شد (تاریخ ویرایش جزوه در قسمت فوقانی صفحات درج شده است).
- ✓ استفاده از جزوه با ذکر منبع آن (www.hoseinzadeh.net) بلامانع است.
- ✓ مسلماً جزوه خالی از اشتباه نیست. در صورتی که به اشتباهی برخوردید، ممنون می شوم که از طریق سایت اطلاع دهید تا در ویرایش بعدی اصلاح شود.

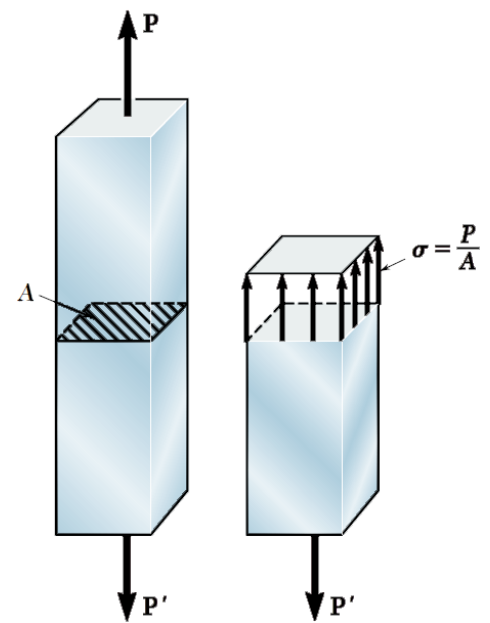
حسین زاده

۱۳۹۰/۲/۱۰

۲- تنش و کرنش

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

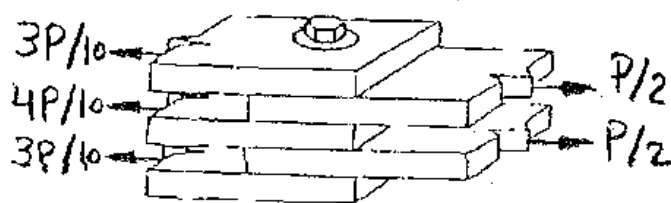
تنش = نیرو بر واحد سطح



تفاوت تنش با فشار چیست؟

- فشار همیشه بر سطح عمود است ---- تنش می تواند مولفه مماس بر سطح نیز داشته باشد. مثلا در شکل زیر در مقطع پیچ تنشهای مماسی داریم.
- فشار بر سطح خارجی جسم اثر می کند ---- تنش معمولا در داخل جسم بررسی می شود.
- فشار اسکالر است (فقط مقدار دارد) ---- تنش بردار است (مقدار و جهت دارد)

۴۹- در اتصال زیر مطابق شکل ۵ ورق فولادی که ضخامت هر یک t می باشد با یک پیچ با سطح مقطع A به همدیگر متصل شده اند و نیروی P را باید انتقال دهند. تنش برشی ماکزیمم در پیچ کدام است؟



$$\frac{1}{4} \left(\frac{P}{A} \right) \quad (1)$$

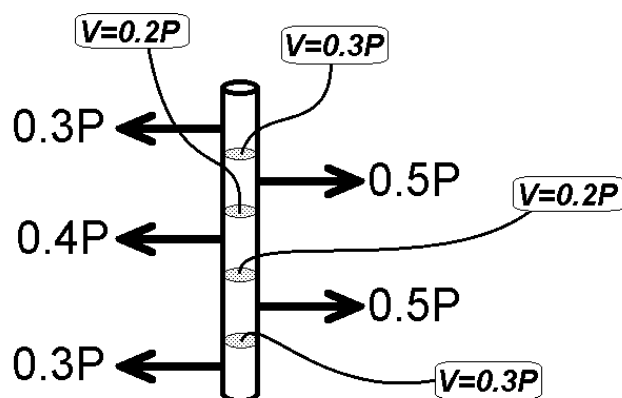
$$\frac{3}{10} \left(\frac{P}{A} \right) \quad (2)$$

$$\frac{2}{10} \left(\frac{P}{A} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{P}{A} \right) \quad (4)$$

حداکثر نیروی "خارجی" وارد بر پیچ = $0.5P$

حداکثر نیروی برشی "داخلی" وارد بر مقطع پیچ = $0.3P$

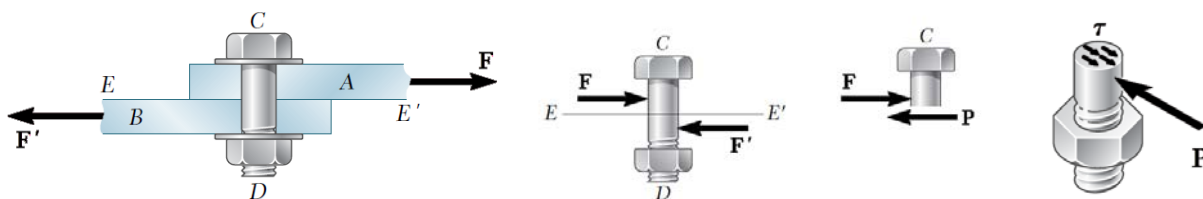


نیروهای وارد بر پیچ

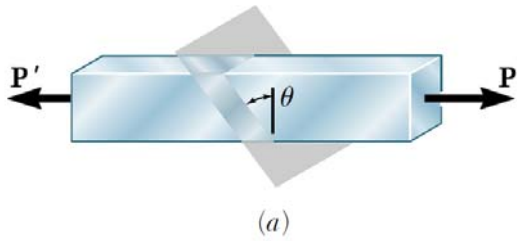
• تنش بر اساس نیروهای "داخلی" محاسبه می شود:

$$\tau_{max} = \frac{0.3P}{A}$$

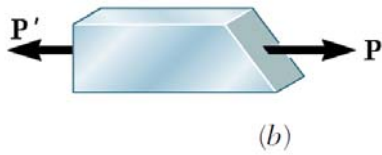
در شکل زیر F و F' نیروی "خارجی" هستند که بر پیچ وارد میشوند. ولی P نیروی "داخلی" است. تنشها بر اساس نیروهای "داخلی" محاسبه می شوند.



تفاوت تنش محوری با تنش برشی چیست؟

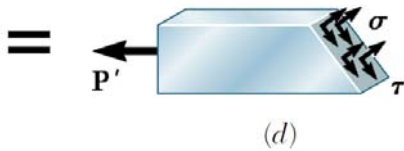
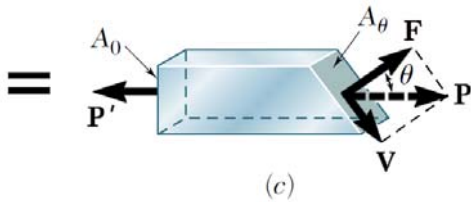


در شکل مقابل عضو تحت کشش محوری است. ولی در صفحه مورب در داخل عضو هم کشش داریم و هم برش

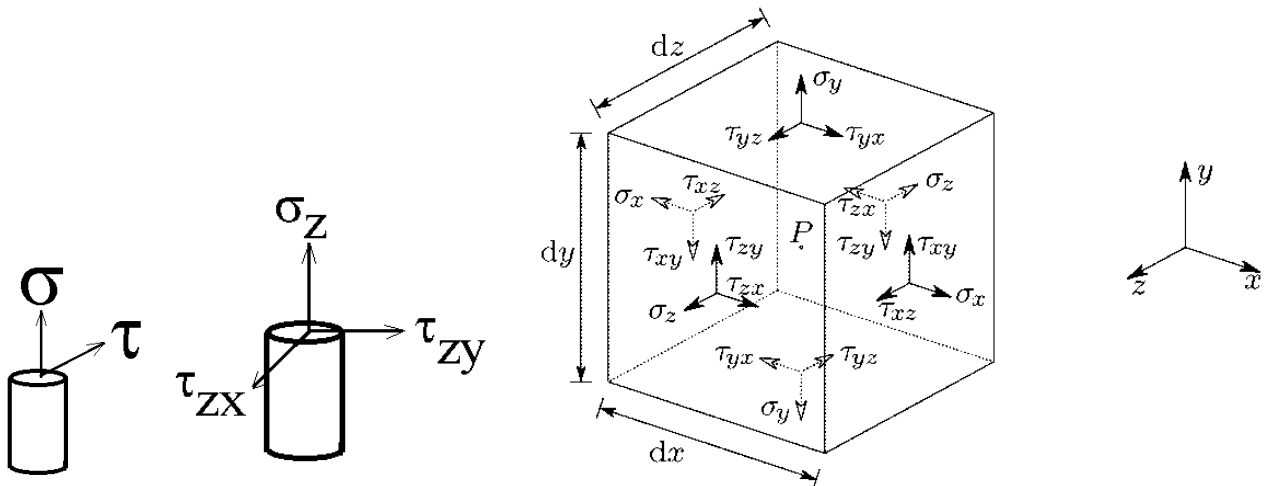
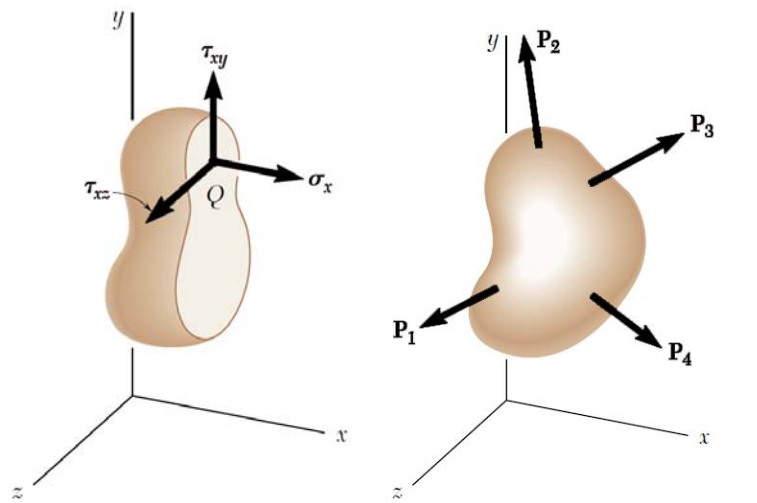


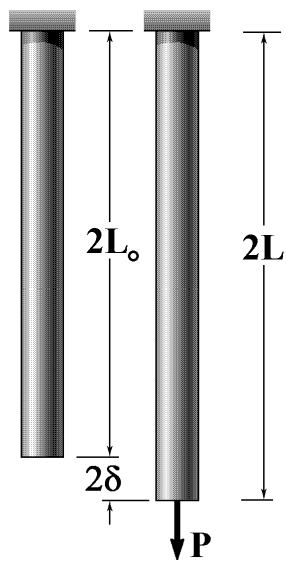
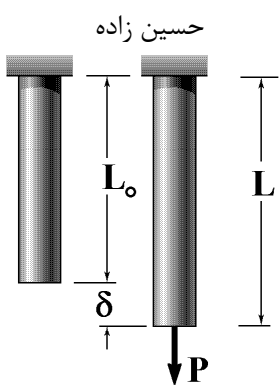
نتیجه: مقدار تنش بستگی به صفحه تنش دارد.

با تغییر زاویه صفحه تنش مقادیر تنشهای برشی و محوری وارد بر آن صفحه نیز تغییر می کند.



تنش را می توان به صورت بردار نشان داد:





کرنش چیست؟

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{2\delta}{2L}$$

؟L₀ یا L

کرنش مهندسی: $\epsilon = \frac{L-L_0}{L_0}$

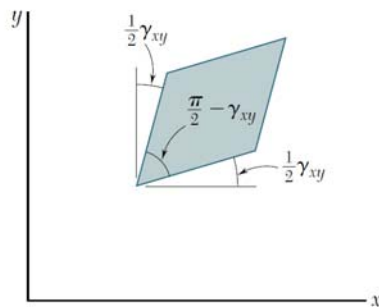
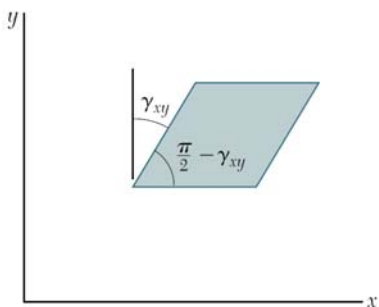
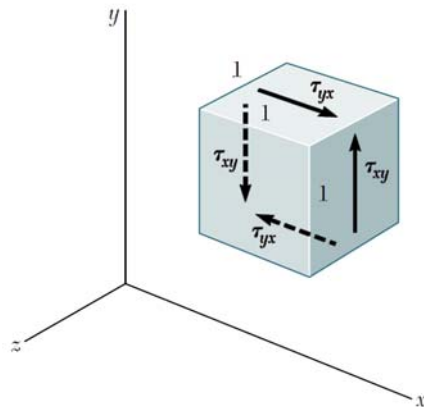
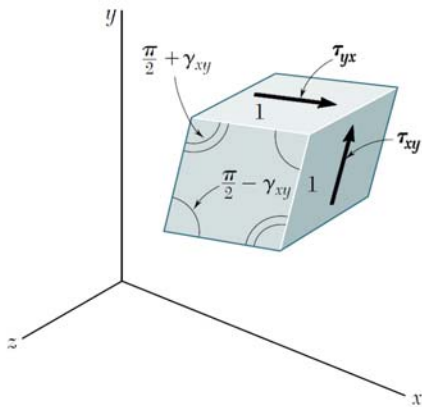
کرنش واقعی: $\epsilon = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0}$

قانون هوک:

$$\sigma = E\epsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



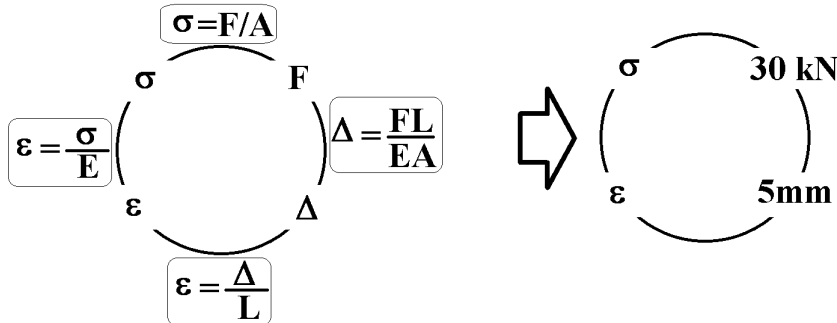
۴۷- بر اثر اعمال نیروی کششی 30 kN به یک میله منشوری با سطح مقطع 300 mm^2 و طول 10 cm ، طول آن به میزان 5 میلی‌متر افزایش می‌یابد. مدول یانگ مصالح این میله برابر کدام است؟

$$2 \times 10^2 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (2)$$

$$2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (1)$$

$$2 \times 10^2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (4)$$

$$2 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (3)$$



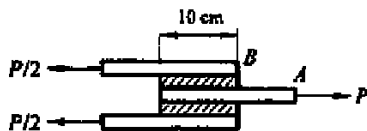
گزینه ۴:

$$\Delta = \frac{FL}{EA} \rightarrow 5 \text{ mm} = \frac{30000 \text{ N} \times 100 \text{ mm}}{E \times 300} \rightarrow E = 2000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

سراسری ۹۲- دکتری

۲- دو لایه لاستیکی به ابعاد $10 \times 10 \times 2 \text{ cm}$ به سه ورق فولادی صلب متصل شده‌اند. ورق‌های فولادی مطابق شکل بارگذاری شده‌اند. اگر $P = 1 \text{ kN}$ باشد، میزان تغییر مکان افقی نقطه A نسبت به B چند سانتی‌متر است؟ ضخامت عمود بر صفحه

10 cm و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون لاستیک به ترتیب $E = 3 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ و $\nu = 0.5$ است.



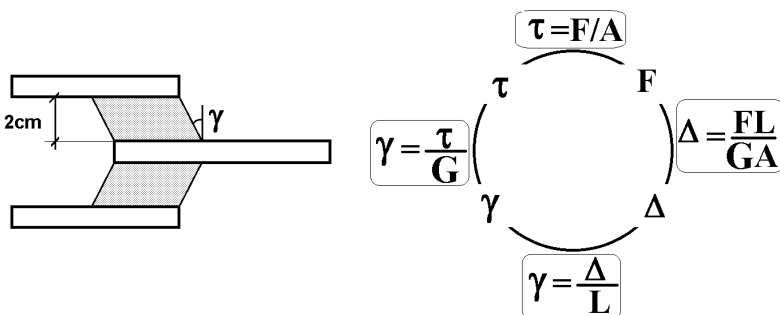
$$0.05 \quad (1)$$

$$0.1 \quad (2)$$

$$0.15 \quad (3)$$

$$0.2 \quad (4)$$

گزینه ۲



$$\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{500 \text{ N}}{0.1 \times 0.1} = 5 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\tau}{\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right)} = \frac{5 \times 10^4}{\left(\frac{3 \times 10^6}{3}\right)} = 0.05$$

$$\Delta_{A,B} = \gamma L = 0.05 \times 2 \text{ cm} = 0.1 \text{ cm}$$

$$S.F. = \frac{\text{تنش تسلیم}}{\text{تنش مجاز}} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_{all}}$$

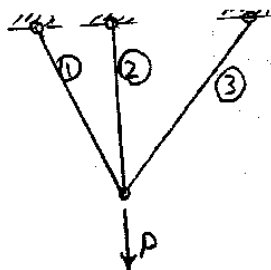
ضریب اطمینان:

تنش مجاز به مانند سرعت مجاز در جاده می ماند. برای مثال اگر حداکثر سرعت ممکن برای اتومبیل ۲۰۰ km/hr باشد (تسلیم ماده σ_Y) و سرعت مجاز ۱۲۰ km/hr باشد (تنش مجاز ماده σ_{all}). در این صورت ضریب اطمینان برابر ۱.۶۷ می باشد. تنش مجاز را با σ_w (work stress) نیز نشان می دهند.

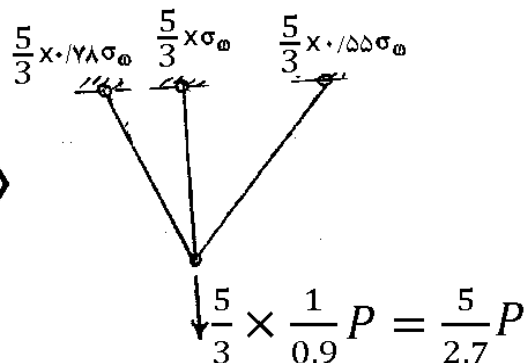
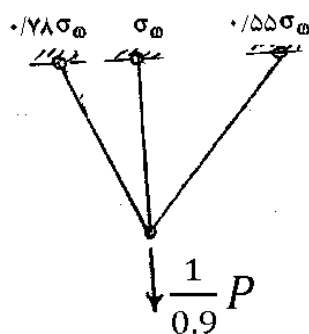
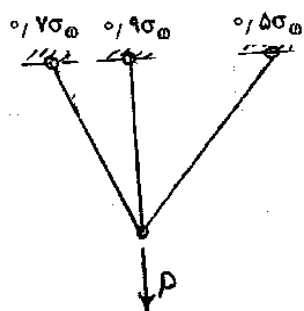
سراسری ۸۷

۵۹- در شکل روبرو طراحی چنان انجام شده که زیر اثر بار P تنش در میله‌های ۱، ۲، ۳ به ترتیب $0.7\sigma_w$ ، $0.9\sigma_w$ و $0.5\sigma_w$ است.

ضریب اطمینان $\frac{5}{3}$ می باشد. بار P در چه ضریبی ضرب شود تا یکی از میله‌ها به تسلیم برسد؟



- (۱) $\frac{3}{5}$
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{5}{3}$
- (۴) $\frac{5}{2.7}$



اگر بار وارد شده $\frac{5}{3} \times \frac{1}{0.9} P = \frac{5}{2.7} P$ باشد تنش در میله میانی به $\frac{5}{3} \sigma_w$ می رسد و میله میانی به تسلیم می رسد.

۳- بارگذاری محوری

حرکت اجسام صلب در صورتی که نوع تغییر شکل مشخص باشد

اگر یک قطعه صلب توسط چند میله (یا فنر) نگه داشته شده باشد، و تغییر مکان بخواهند چه باید کرد؟

۱- سختی محوری ($K = \frac{EA}{L}$) میله های متصل شونده را محاسبه می کنیم.

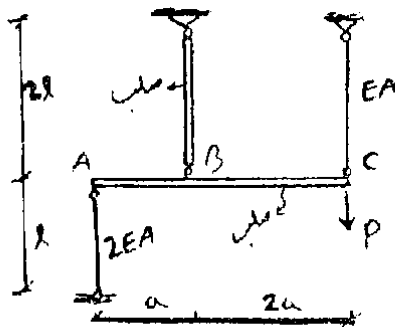
۲- تغییر مکان نقطه ای دلخواه از میله صلب را Δ فرض کرده و با توجه به اطلاعات مسئله تغییر مکان باقی نقاط را بر حسب Δ محاسبه می کنیم.

۳- نیروی هر میله را بر اساس رابطه $F=K\Delta$ محاسبه می کنیم.

۴- نمودار آزاد میله صلب را رسم کرده و با استفاده از روابط تعادل مجهولات مسئله را بدست می آوریم.

آزاد ۹۰

۴۲- در سازه نشان داده شده تغییر مکان گره C کدام است؟



$$\frac{4Pl}{3EA} \quad (۲)$$

$$\frac{2Pl}{EA} \quad (۱)$$

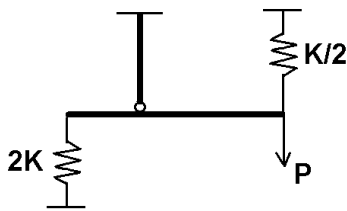
صفر (۴)

$$\frac{Pl}{EA} \quad (۳)$$

گزینه ۳

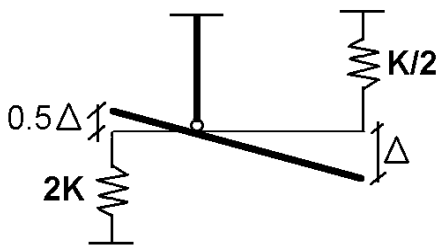
گام ۱:

سختی میله ها را کنارشان بنویسید (EA/L را برابر K بگیرید):



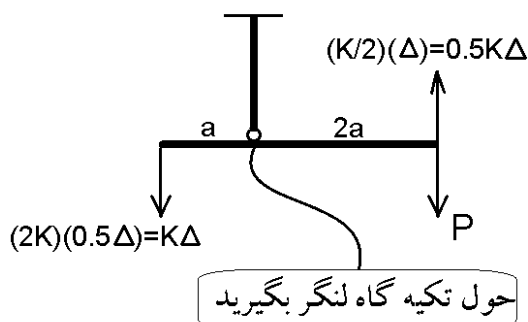
گام ۲:

تغییر مکان یک نقطه دلخواه (مثلا محل اثر بار P) را Δ فرض کنید. تغییر مکان بقیه نقاط را بر حسب Δ بنویسید:



گام ۳:

نیروی فنرها را بدست آورید و به میله صلب اعمال کنید:

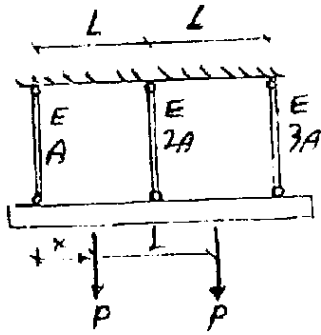


گام ۴:

حول تکیه گاه (محل اتصال میله صلب قائم) لنگر بگیرید:

$$\sum M = 0 \rightarrow P(2a) - 0.5K\Delta(2a) - K\Delta(a) = 0 \rightarrow \Delta = \frac{P}{K} = \frac{P}{\left(\frac{EA}{L}\right)} = \frac{PL}{EA}$$

۴۴- تیر صلبی توسط ۳ میله با طولهای یکسان مطابق شکل نگهداری شده است فاصله x را به گونه‌ای تعیین نمایید که تیر بر وضعیت افقی که از ابتدا قرار داشته باقی بماند. (x فاصله بار اول از میله اول و فاصله دو بار از هم L می‌باشد).

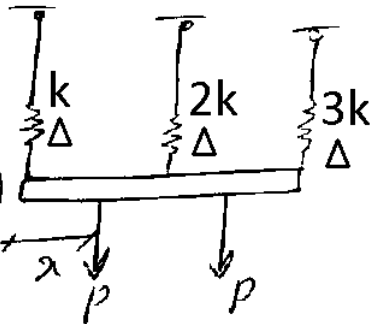


(۲) L

(۱) $\frac{L}{2}$

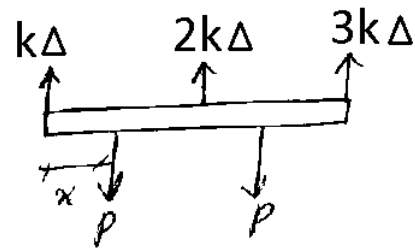
(۴) $\frac{2}{3}L$

(۳) $\frac{5}{6}L$



(۱) نوشتن K های نسبی
(۲) نوشتن Δ های نسبی

دقت شود که Δ ها برابرند. چون گفته میله افقی باقی بماند



(۳) جاگذاری نیروها

روشین ردابط استاتیکی ← $\sum F_y = 0 \rightarrow k\Delta + 2k\Delta + 3k\Delta = 2P$

$\rightarrow \boxed{k\Delta = \frac{P}{3}} \text{ (I)}$

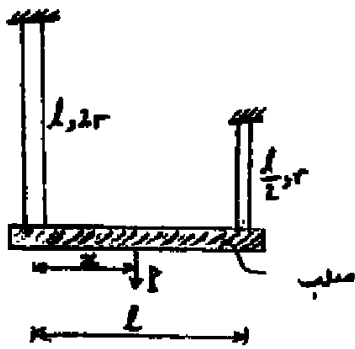
$\sum M_A = 0 \rightarrow 2k\Delta \times L + 3k\Delta \times 2L = Pn + P(L+n)$

$\rightarrow 8k\Delta = P(L+2n) \xrightarrow{\text{(I)}} \frac{8P}{3} = P(L+2n)$

$\rightarrow n = \frac{5L}{6}$

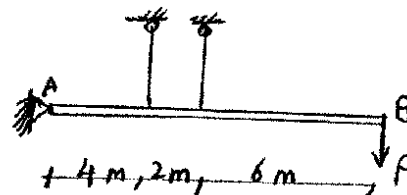
یاد نگار، دانشجو

۶- قطعه صلبی مطابق شکل به دو میله ارتجاعی هم جنس با مقطع دایره که طول و شعاع سطح مقطع آنها روی شکل نشان داده شده است جوش داده شده و در وضعیت افقی قرار دارد. فاصله x را به گونه‌ای به دست آورید که پس از اعمال نیروی P قطعه صلب گمکان افقی باقی بماند؟

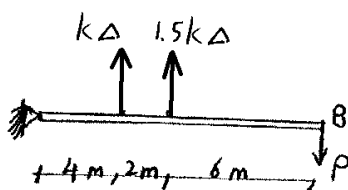
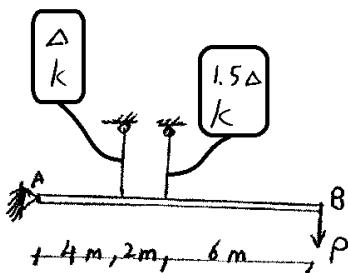


- (۱) $\frac{l}{4}$
 (۲) $\frac{l}{3}$
 (۳) $\frac{l}{2}$
 (۴) $\frac{2l}{3}$

۵۳- مطابق شکل تیر صلب AB توسط دو میله که دارای سطح مقطع 20 cm^2 و تنش مجاز 36 kg/cm^2 می‌باشند، نگهداری شده و نیروی P به آن وارد می‌شود. مقدار بار مجاز P وارد بر سازه بر حسب kg چقدر است؟



- (۱) ۲۵۰
 (۲) ۵۲۰
 (۳) ۸۷۰
 (۴) ۷۸۰



$$\sum M_A = 0 \rightarrow K\Delta \times 4 + 1.5K\Delta \times 6 - 12P = 0$$

$$\rightarrow K\Delta = \frac{12}{13}P$$

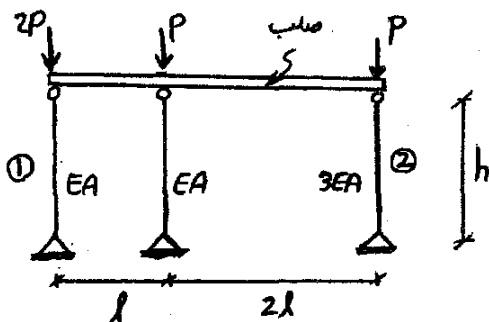
نیروی میله سمت راستی بیشتر است و برابر است با:

$$\rightarrow F_{\text{میله سمت راست}} = 1.5K\Delta = \frac{18}{13}P$$

تنش مجاز میله برابر $36 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ و مساحت مقطع آن برابر 20 cm^2 می‌باشد.

بنابراین نیروی مجاز میله برابر $20 \times 36 = 720 \text{ kg}$ مجاز F می‌باشد:

$$\frac{18}{13}P < 720 \rightarrow P < 520 \text{ kg}$$

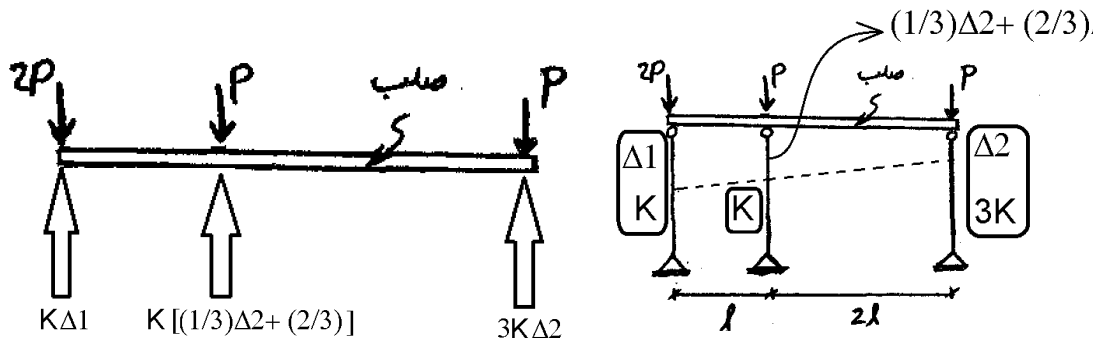


۴۲- نسبت تغییر مکان میله (۱) به (۲) کدام است؟

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) 6

(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

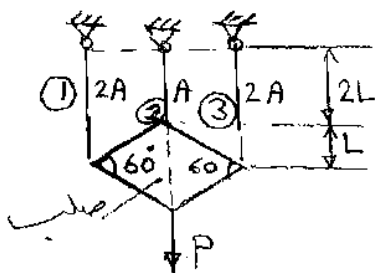
گزینه ۲:



$$\sum M_{\text{حول میله وسط}} = 0 \rightarrow K\Delta_1 \times l - 2P \times l - 3K\Delta_2 \times 2l + P \times 2l = 0 \rightarrow \Delta_1 = 6\Delta_2$$

سراسری ۸۶

۴۴- جسم صلبی به شکل لوزی که از وزن آن صرف نظر می شود از سه رأس به سه میله آویزان شده که جنس آنها یکسان است. نیروی P به رأس چهارم لوزی آویزان است نیروی وارد به هر میله چقدر است؟



(۱) $F_1 = F_2 = F_3 = \frac{P}{3}$

(۲) $F_1 = P, F_2 = F_3 = 0$

(۳) $F_1 = F_2 = \frac{P}{4}, F_3 = \frac{P}{2}$

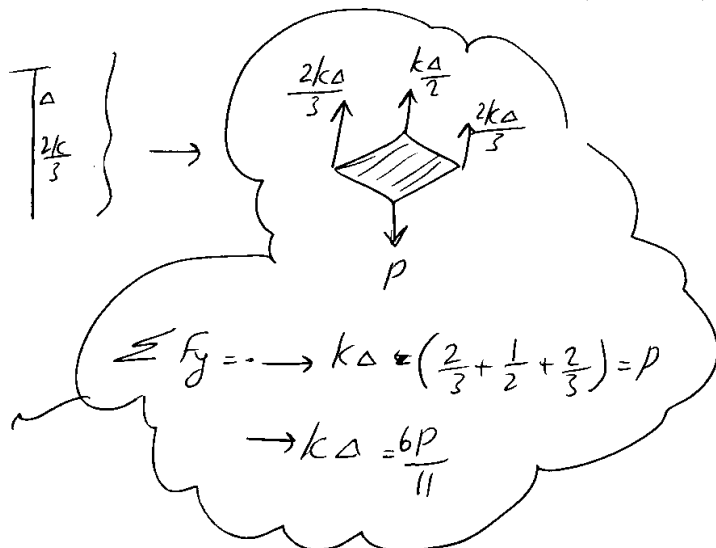
(۴) $F_1 = F_2 = \frac{4P}{11}, F_3 = \frac{2P}{11}$

هم سازه و هم بارگذاری متقارن است. بنابراین دلتا ها یکسان است.

$$\Delta = \begin{matrix} \Delta \\ k \end{matrix} = \begin{matrix} \Delta \\ \frac{2k}{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Delta \\ k \end{matrix} = \begin{matrix} \Delta \\ \frac{k}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Delta \\ k \end{matrix} = \begin{matrix} \Delta \\ \frac{2k}{3} \end{matrix}$$

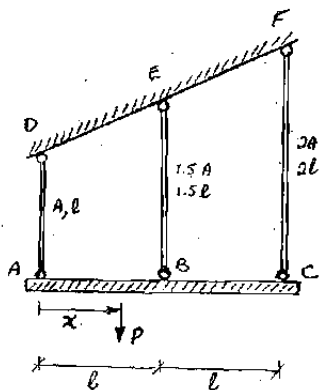
$$F_1 = \frac{2}{3} k \Delta = \frac{4P}{11}$$

$$F_2 = \frac{k \Delta}{2} = \frac{3P}{11}$$

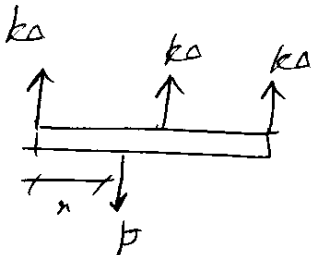
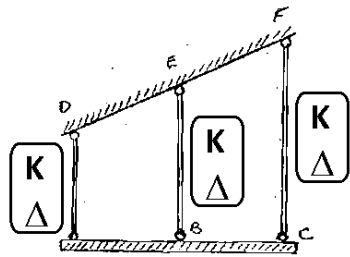


سراسری ۸۶

۴۵- تیر صلب ABC توسط ۲ میله مطابق شکل آویزان شده است. موقعیت بار P را بگونه‌ای تعیین نمایید، که تیر در وضعیت کاملاً افقی که از ابتدا قرار داشته است باقی بماند.



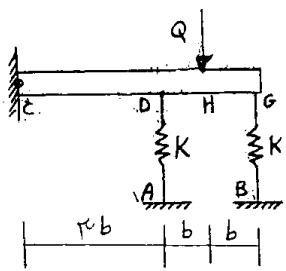
- (۱) $x = l$
- (۲) $x = \frac{l}{2}$
- (۳) $x = \frac{2l}{3}$
- (۴) $x = \frac{5l}{3}$



چون بار هم متقارنند بار را بیاریم مثل
P باید در مرکز قرار گیرد x=l

سراسری ۸۸

۵۲- در سازه شکل زیر نسبت Q به خیز H را حساب کنید. تیر CG صلب است.



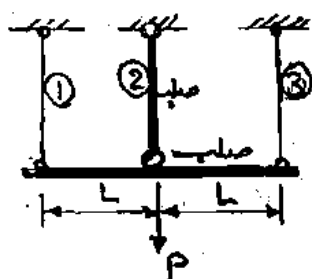
- (۱) $\frac{18}{8}K$
- (۲) $\frac{17}{8}K$
- (۳) $\frac{16}{8}K$
- (۴) $\frac{15}{8}K$

$$\left. \begin{matrix} \Delta_2 \\ k_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \Delta_1 \\ k \end{matrix} \left. \begin{matrix} \frac{5}{3}\Delta_1 \\ k \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} \varphi \\ \frac{5}{3}k\Delta_1 \end{matrix} \rightarrow \sum M_C = 0 \rightarrow k\Delta_1 \times 3b + \frac{5}{3}k\Delta_1 \times 5b = \varphi \times 4b$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = \frac{6\varphi}{17k} \rightarrow \Delta_2 = \frac{10\varphi}{17k} \quad \Delta_H = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{8\varphi}{17k} \Rightarrow \frac{\varphi}{\Delta_H} = \frac{17k}{8}$$

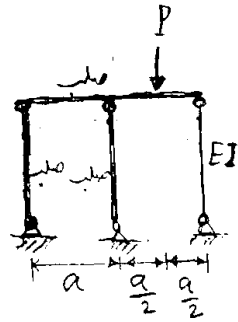
سراسری ۸۵

در شکل روبرو میله افقی و میله قائم وسطی صلب هستند. نیروی وارد به هر میله قائم چقدر است؟



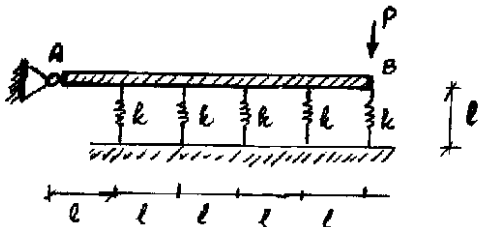
- (۱) $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{P}{3}$
- (۲) $P_1 = P_2 = \frac{P}{4}, P_3 = \frac{P}{2}$
- (۳) $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}, P_3 = 0$
- (۴) $P_1 = P_2 = 0, P_3 = P$

۵۴- در شکل روبه‌رو میله افقی و دو میله‌ی سمت چپ صلب می‌باشند. میله‌ی سمت راست دارای طول L و سطح مقطع A و مدول ارتجاعی E می‌باشد. نیروی وارد بدان چقدر است؟

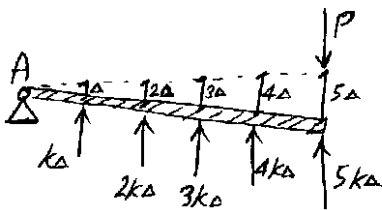


- (۱) صفر
- (۲) $\frac{PL}{AE}$
- (۳) $\frac{PL}{2AE}$
- (۴) $\frac{PL}{3AE}$

۴۶- در سازه شکل مقابل عضو AB صلب بوده و سختی فنرها برابر k می‌باشد. مقدار تغییر مکان نقطه B کدام است؟



- (۱) $\frac{25p}{11k}$
- (۲) $\frac{11p}{5k}$
- (۳) $\frac{11p}{25k}$
- (۴) $\frac{5p}{11k}$

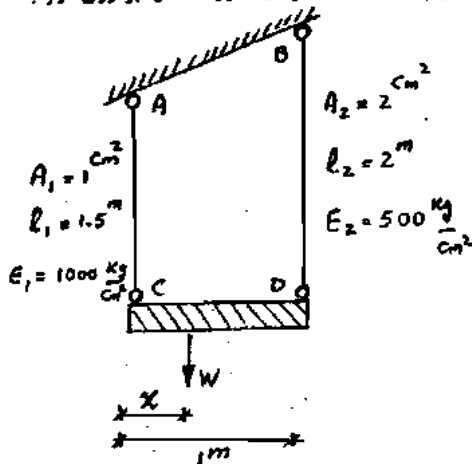


$$\sum M_A = 0 \rightarrow 5PL - (5k\Delta) \times 5L - (4k\Delta) \times 4L - (3k\Delta) \times 3L - (2k\Delta) \times 2L - (k\Delta) \times L = 0$$

$$\Delta = \frac{5P}{(25+16+9+4+1)k} = \frac{5P}{55k} = \frac{P}{11k} \rightarrow \Delta_B = 5\Delta = \frac{5P}{11k}$$

تمرین سراسری ۸۵

تیر صلب CD توسط دو میله AC و BD آویزان شده است. موقعیت وزنه W را بر روی تیر به گونه‌ای تعیین نمایید، که تیر در وضعیت افقی باقی بماند.

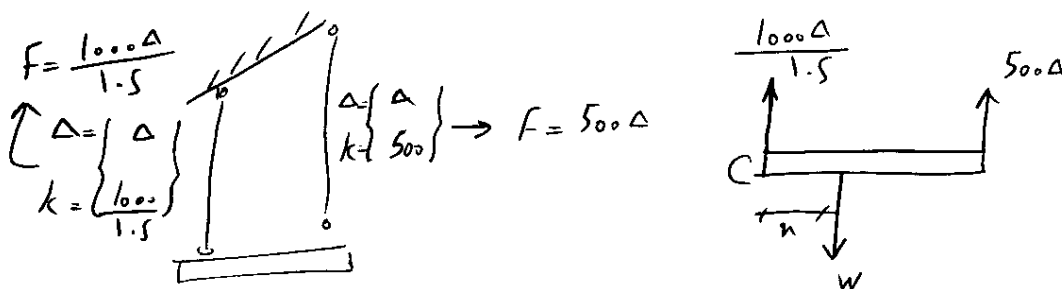


- ۱) $\frac{1}{2}m$
- ۲) $\frac{2}{5}m$
- ۳) $\frac{1}{3}m$
- ۴) $\frac{2}{7}m$

از آنجا که گفته تیر به صورت افقی باقی می ماند، تغییر طول هر دو میله با هم برابر خواهد بود (هر دو نقطه B و C تغییر مکان Δ خواهند داشت).

۱- سختی محوری میله ها برابر $K = EA/L$ می باشد.

۲- نیروی میله AC برابر $F = K\Delta = \frac{10000\Delta}{1.5}$ و نیروی میله BD برابر $F = K\Delta = 5000\Delta$ خواهد بود:



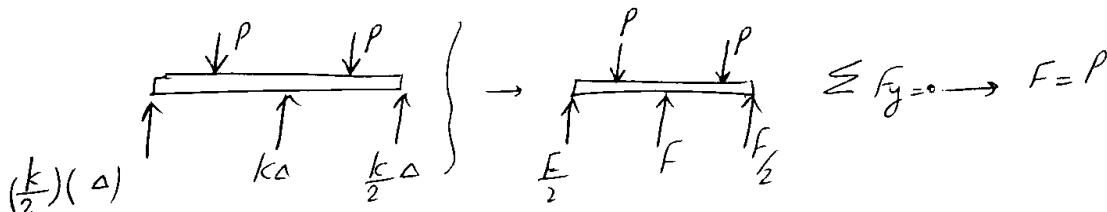
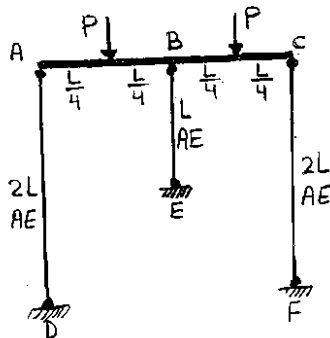
حال معادلات تعادل را می نویسیم:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow \frac{17500\Delta}{1.5} - W = 0 \rightarrow \Delta = \frac{1.5W}{17500} \\ \sum M_C = 0 \rightarrow 5000\Delta \times L - W \times x = 0 \rightarrow \frac{5000 \times 1.5W}{17500} = W \times x \end{cases} \rightarrow x = \frac{3}{7}$$

تمرین سراسری ۸۶

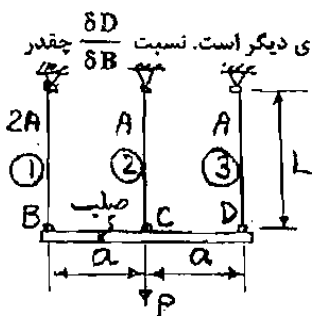
۴۸- نیرو در عضو BE کدام است؟ (قطعه ABC، صلب می باشد).

- ۱) P
- ۲) $\frac{P}{2}$
- ۳) $\frac{2P}{3}$
- ۴) $\frac{4P}{10}$

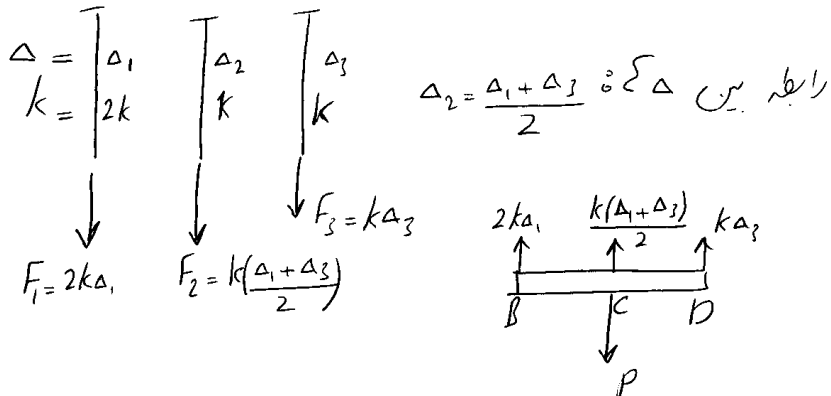


تمرین سراسری ۸۴

۴۲- در شکل روبرو طول و جنس هر سه میله یکسان ولی سطح مقطع میله ① دو برابر هر کدام از میله‌های دیگر است. نسبت $\frac{\delta D}{\delta B}$ چقدر است؟



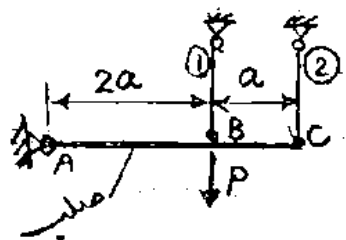
- ۱) ۰.۵
- ۲) ۱
- ۳) ۱.۵
- ۴) ۲



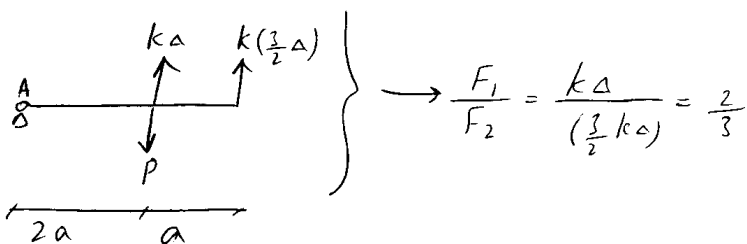
$$\sum F_y = 0 \rightarrow k(2.5\Delta_1 + 1.5\Delta_3) = P \quad \sum M_C = 0 \rightarrow 2k\Delta_1 = k\Delta_3 \rightarrow \boxed{\frac{\Delta_3}{\Delta_1} = 2}$$

تمرین سراسری ۸۵

۴۷- در شکل روبرو دو میله او ۲ از یک جنس، با یک سطح مقطع و با یک طول می‌باشند. چه نسبتی بین نیروی وارد به این میله‌ها وجود دارد $(\frac{P_1}{P_2})$ ؟

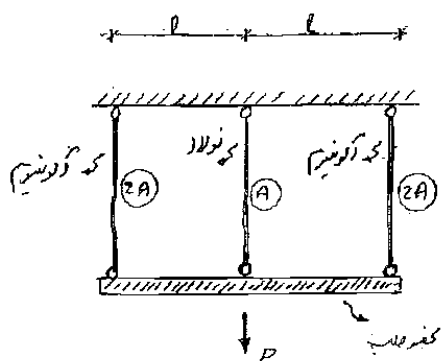


- ۱) ۱
- ۲) 1/2
- ۳) 2/3
- ۴) 3/2



تمرین سراسری ۸۶

۴۱- مطلوبست تعیین نیروهای داخلی در هر یک از اعضاء قائم شکل مقابل. کل سیستم تحت اثر نیروی P قرار گرفته است.



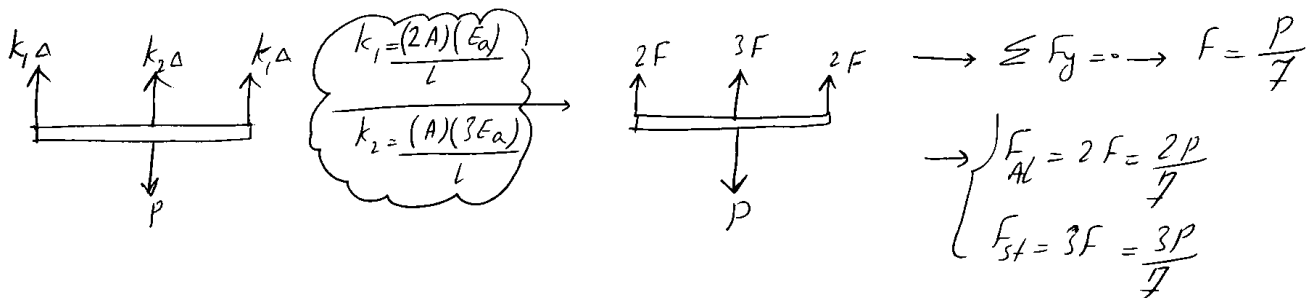
(آلومینیم $E_s = 3E_a$ فولاد)

$F_{Al} = \frac{2}{5}P$, $F_{St} = \frac{1}{5}P$ (۱)

$F_{Al} = \frac{1}{5}P$, $F_{St} = \frac{2}{5}P$ (۲)

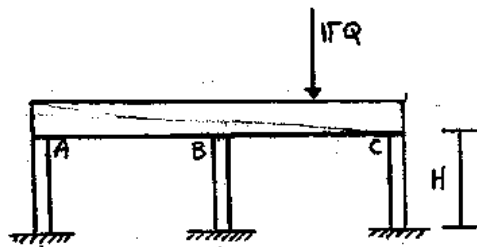
$F_{Al} = \frac{2}{5}P$, $F_{St} = \frac{1}{5}P$ (۳)

$F_{Al} = \frac{2}{5}P$, $F_{St} = \frac{2}{5}P$ (۴)



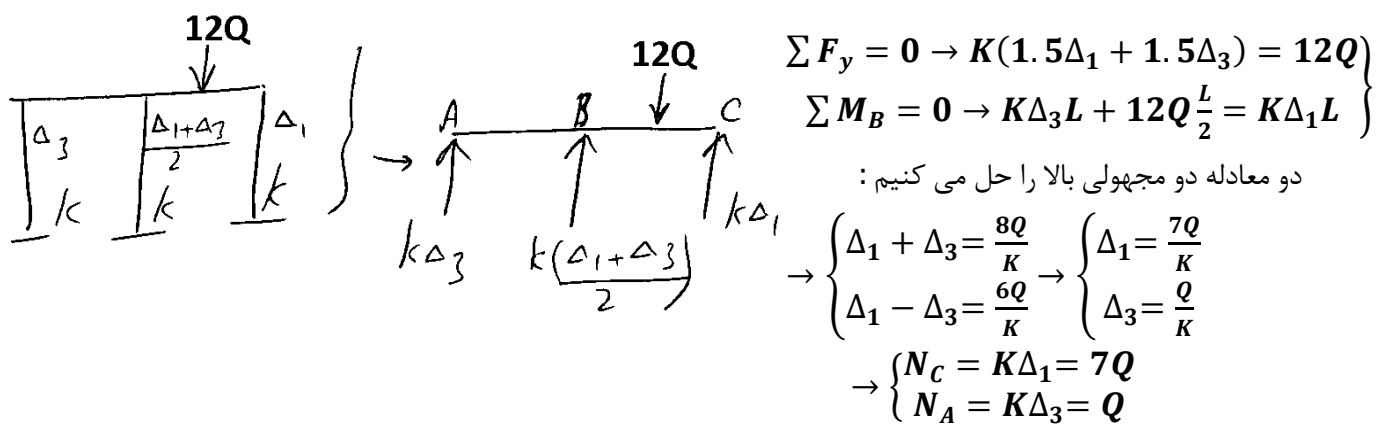
تمرین سراسری ۸۷

۵۶- تیر صلب ABC بر روی سه ستون کوتاه کشسان همانند قرار دارد. کدام نیروی محوری ستون صحیح است؟



- $N_A = 2Q$ (۱)
- $N_A = 2Q$ (۲)
- $N_C = 6Q$ (۳)
- $N_C = 7Q$ (۴)

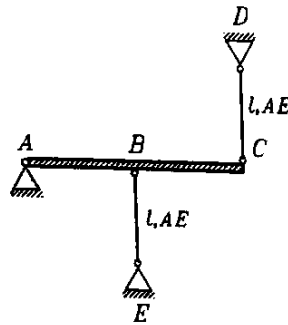
گزینه ۴ صحیح است.



مثال

در سازه زیر که به علت خطای ساخت، عضو CD به اندازه Δ کوتاهتر ساخته شده است، نیروی کششی ایجاد شده در این عضو پس از نصب سازه چقدر است؟

$(AB = BC = l)$



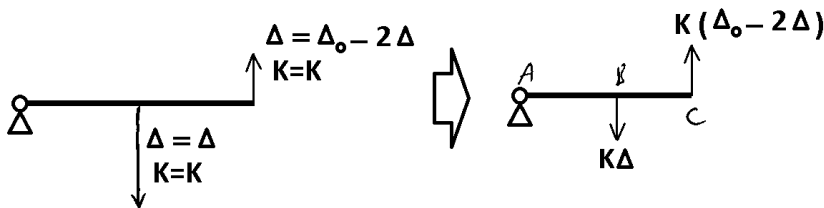
$$\frac{AE\Delta}{\Delta l} \quad (1)$$

$$\frac{2AE\Delta}{\Delta l} \quad (2)$$

$$\frac{3AE\Delta}{\Delta l} \quad (3)$$

$$\frac{4AE\Delta}{\Delta l} \quad (4)$$

نحوه حل مسائل با خطای ساخت:



$$\sum M_A = 0$$

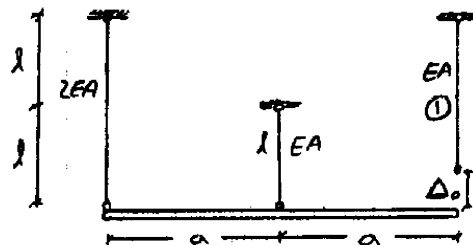
$$\rightarrow K\Delta = 2K(\Delta_0 - 2\Delta) \rightarrow \Delta = \frac{2\Delta_0}{5}$$

$$F_{CD} = K(\Delta_0 - 2\Delta) = \frac{K\Delta_0}{5}$$

$$\rightarrow F_{CD} = \frac{EA\Delta_0}{5L}$$

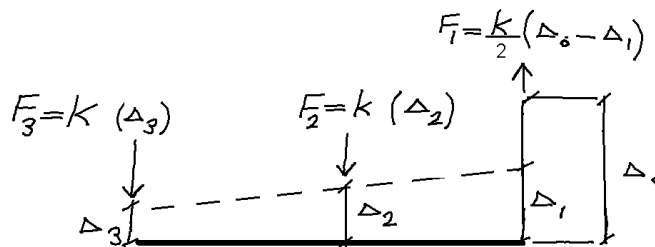
آزاد ۹۱

۴۵- میله ۱ به اندازه Δ_0 کوتاهتر ساخته شده است بعد از اتصال این میله به عضو صلب نیروی ایجاد شده در میله ۱ کدام است؟



(۱) صفر $\frac{1}{3} \frac{EA}{l} \Delta_0$

(۲) $\frac{1}{10} \frac{EA}{l} \Delta_0$ (۳) $\frac{1}{7} \frac{EA}{l} \Delta_0$



بنابراین تنها دو مجهول داریم. حال با استفاده از دو معادله تعادل ($\sum F_y = 0, \sum M = 0$) مقادیر Δ_1 و Δ_3 را بدست می آوریم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{K}{2} \times (\Delta_0 - \Delta_1) - K \times \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \right) - K \times \Delta_3 = 0 \rightarrow -\Delta_1 - \frac{3}{2} \Delta_3 + \frac{1}{2} \Delta_0 = 0$$

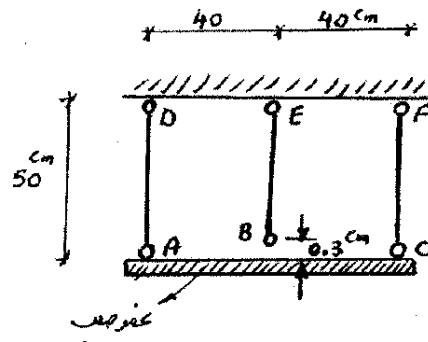
$$\sum M = 0 \rightarrow \left[\frac{K}{2} \times (\Delta_0 - \Delta_1) \right] \times a + [K \times \Delta_3] \times a = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \Delta_1 + \Delta_3 + \frac{1}{2} \Delta_0 = 0$$

$$\rightarrow \Delta_1 = \frac{5}{7} \Delta_0 \rightarrow F_1 = \left[\frac{EA}{2L} \times (\Delta_0 - \Delta_1) \right] = \frac{EA}{7L} \Delta_0$$

سراسری ۸۹

۵۰- در سازه شکل مقابل برای اتصال سه میله عمودی به صفحه صلب، نقطه B به اندازه 3cm کوتاه می‌باشد. در صورتی که عضو BE تحت کشش به صفحه صلب متصل شود، نیروی داخلی هر یک از اعضاء را بر حسب kg بدست آورید. سطح مقطع و

مدول ارتجاعی هر سه میله عمودی به ترتیب برابر $4 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ، 5cm^2 می‌باشد.



$$F_{AD} = F_{CF} = 2000, F_{BE} = 4000 \quad (1)$$

$$F_{AD} = F_{CF} = 4000, F_{BE} = 8000 \quad (2)$$

$$F_{AD} = F_{CF} = 8000, F_{BE} = 16000 \quad (3)$$

$$F_{AD} = F_{CF} = 1000, F_{BE} = 2000 \quad (4)$$

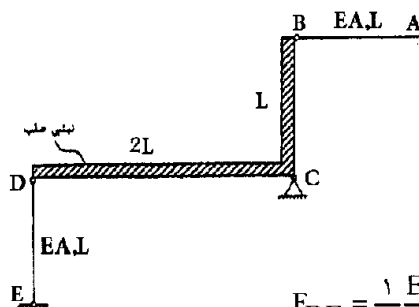
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2k\Delta = k(0.3 - \Delta) \rightarrow \Delta = 0.1$$

$$F_{AD} = F_{CF} = k\Delta = \frac{EA}{L} \times 0.1 = \frac{4 \times 10^5 \times 5}{50} \times 0.1 = 4000$$

$$F_{BE} = k(0.3 - \Delta) = \frac{4 \times 10^5 \times 5}{50} \times (0.3 - 0.1) = 8000$$

سراسری ۹۳

۵۰- میله AB بر اثر خطای ساخت به اندازه δ_0 کوتاه ساخته شده است. چنانچه گره B در جای خود بر روی نبشی صلب مطابق شکل مستقر گردد، نیروی محوری اعضاء AB و DE چه مقدار می‌باشد؟ (جنس و طول دو میله یکسان است)



$$F_{DE} = \frac{1}{10} \frac{EA}{L} \delta_0, F_{AB} = \frac{1}{5} \frac{EA}{L} \delta_0 \quad (1)$$

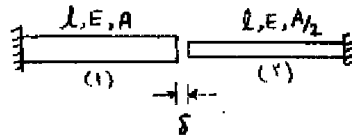
$$F_{DE} = \frac{1}{5} \frac{EA}{L} \delta_0, F_{AB} = \frac{2}{5} \frac{EA}{L} \delta_0 \quad (2)$$

$$F_{DE} = \frac{4}{5} \frac{EA}{L} \delta_0, F_{AB} = \frac{8}{5} \frac{EA}{L} \delta_0 \quad (3)$$

$$F_{DE} = \frac{2}{5} \frac{EA}{L} \delta_0, F_{AB} = \frac{4}{5} \frac{EA}{L} \delta_0 \quad (4)$$

سراسری ۹۲- دکتری

۱- میله‌های هم محور نشان داده شده در شکل زیر مفروض است. اگر انتهای آزاد آنها را که به میزان δ از هم فاصله دارند به یکدیگر متصل نماییم، نیروی محوری ایجاد شده در میله (۲) چقدر است؟



$$\frac{EA\delta}{3L} \quad (1)$$

$$\frac{EA\delta}{2L} \quad (2)$$

$$\frac{EA\delta}{L} \quad (3)$$

$$\frac{2EA\delta}{3L} \quad (4)$$

سراسری ۹۳- دکتری

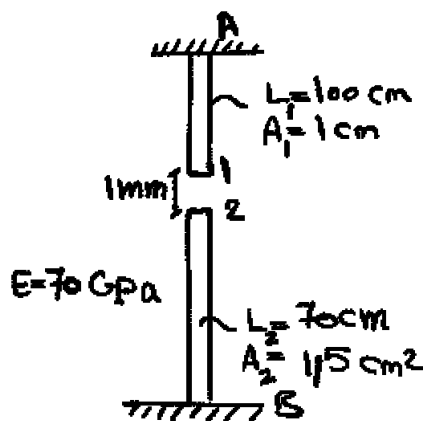
۸- اگر نقطه‌ی شماره ۱ یک کشیده شود به طوری که اتصال یک و دو به صورت مفصلی باشند، عکس‌العمل تکیه‌گاهی در نقطه A بر حسب N چقدر است؟

$$4772/7 \quad (1)$$

$$2800 \quad (2)$$

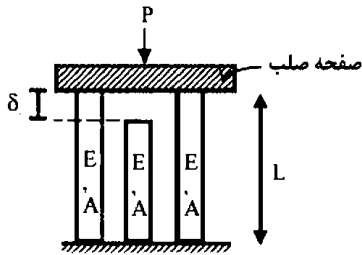
$$2271/7 \quad (3)$$

$$5800 \quad (4)$$



۵- در سازه‌ی متقارن زیر، نیروی P در وسط یک صفحه‌ی صلب که بر روی سه تکیه‌گاه الاستیک قائم قرار دارد وارد می‌شود. هر سه تکیه‌گاه از مصالح یکسان ساخته شده و سطح مقطع مشابهی دارند و فقط تکیه‌گاه وسط به اندازه‌ی δ_0 کوتاهتر از L است. اگر $\frac{\sigma_{all}L}{E} > \delta_0$ باشد، حداکثر نیروی مجاز P چه قدر است؟

(σ_{all} تنش مجاز مصالح است)



$$1) \quad 2\sigma_{all}A$$

$$2) \quad 2\sigma_{all}A$$

$$3) \quad \left[2\sigma_{all} - \frac{\delta_0 E}{L}\right]A$$

$$4) \quad 2\left[\sigma_{all} - \frac{\delta_0 E}{L}\right]A$$

گزینه ۱

میله وسط نیرویی احساس نخواهد کرد. چون قبل از رسیدن صفحه صلب به میله وسط، میله‌های کناری از حد تنش مجاز رد خواهند شد و مجاز به ادامه بارگذاری نخواهیم بود.

در مرحله اول نیرو بین دو میله کناری به صورت مساوی تقسیم می‌شود.

حداکثر نیروی مجاز میله برابر است با:

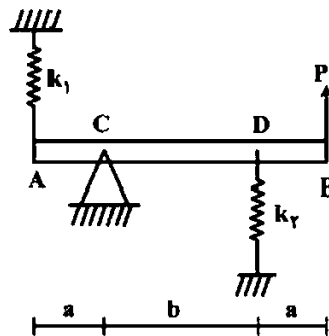
$$F_{all} = \sigma_{all}A$$

بنابراین مجاز میله برابر است با:

$$\delta_{all} = \frac{F_{all}L}{EA} = \frac{\sigma_{all}L}{E}$$

مقدار δ در شکل بیش از حد مجاز است و بنابراین کل نیرو را دو میله به تنهایی تحمل خواهند کرد. با توجه به اینکه نیروی مجاز هر میله برابر $F_{all} = \sigma_{all}A$ می‌باشد، مقاومت کل سیستم برابر $2\sigma_{all}A$ خواهد بود.

۸- در تیر مطابق شکل، مقدار حداکثر نیروی P بر حسب پارامترهای k_1 ، k_2 ، a و b و θ کدام یک از موارد زیر است (θ زاویه چرخش تیر در C بوده و فرض کنید تیر صلب است)؟



$$1) \quad \frac{\theta_{max}(a^2 k_1 + b^2 k_2)}{a + b}$$

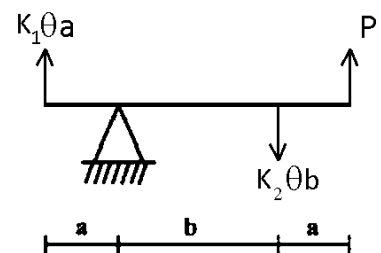
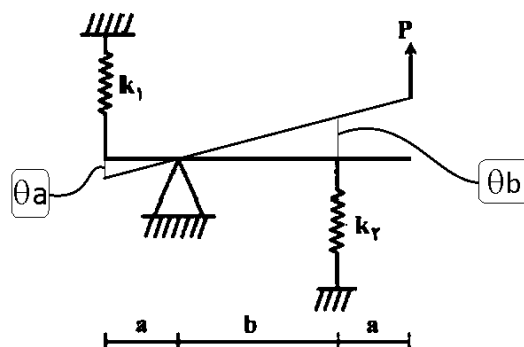
$$2) \quad \frac{\theta_{max}(b^2 k_1 + a^2 k_2)}{a + b}$$

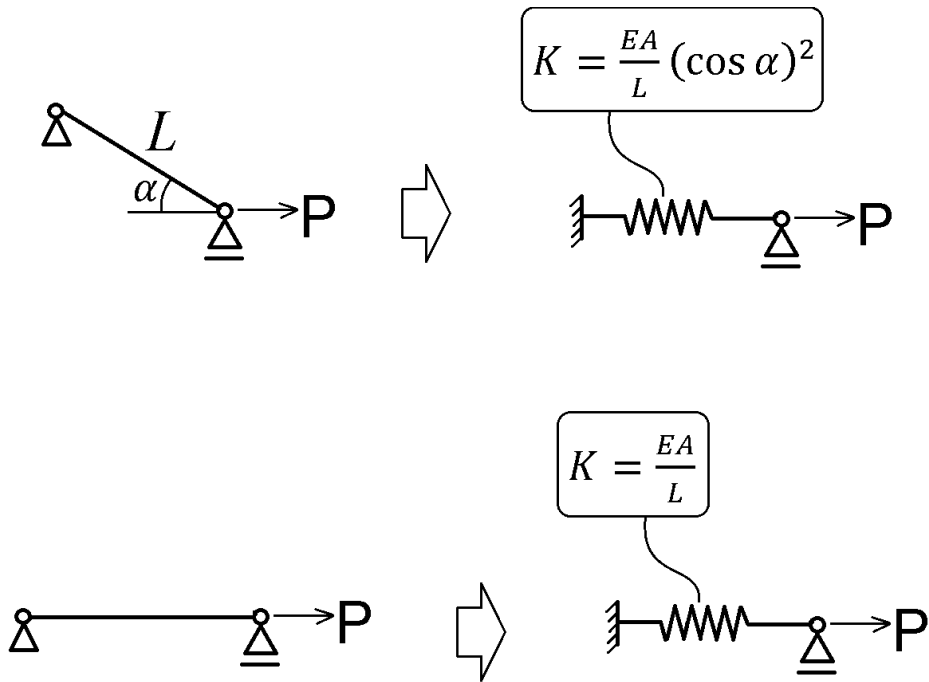
$$3) \quad \frac{\theta_{max}(a^2 k_1 + b^2 k_2)}{(a + b)^2}$$

$$4) \quad \frac{\theta_{max}(b^2 k_1 + a^2 k_2)}{(a + b)^2}$$

گزینه ۱

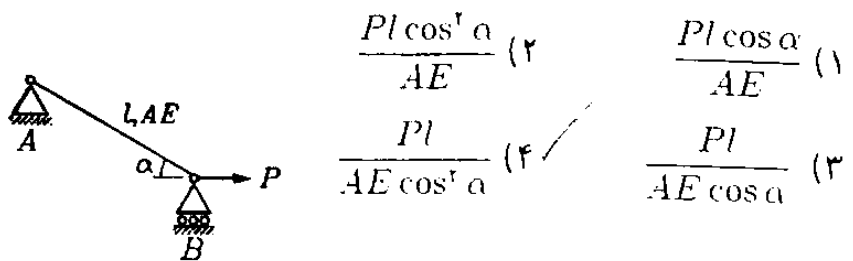
$$\sum M = 0 \rightarrow (K_1 \theta a) \times a + (K_2 \theta b) \times b - P(a + b) = 0 \rightarrow P = \frac{\theta(K_1 a^2 + k_2 b^2)}{(a + b)}$$





مثال

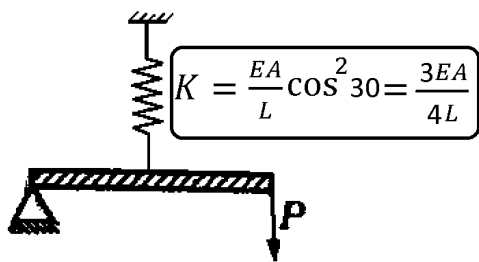
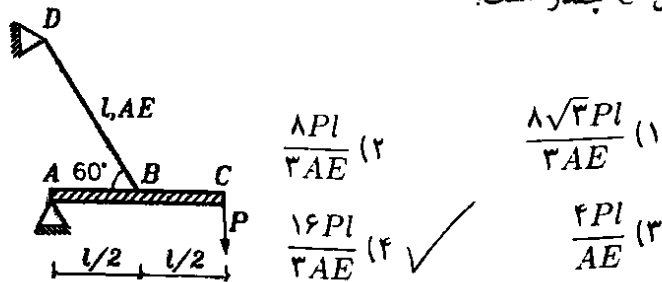
در سازه داده شده تغییر مکان تکیه گاه B چقدر است؟



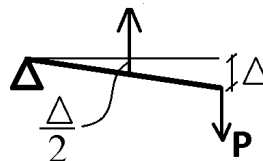
$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram of inclined bar} = \text{Spring model} \quad \Delta = \frac{P}{k} = \frac{PL}{EA \cos^2 \alpha} \\
 & k = \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha
 \end{aligned}$$

در سازه زیر که میله صلب ABC توسط کابل BD مهار شده است

تغییر مکان C چقدر است؟



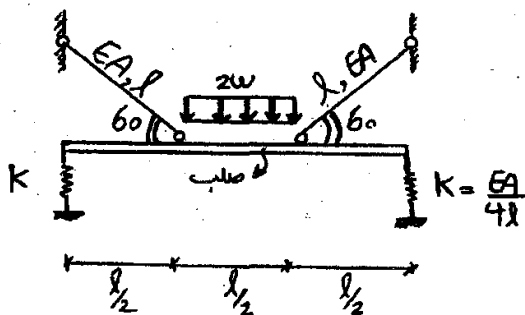
$$F = K \left(\frac{\Delta}{2} \right) = \frac{3EA}{4L} \left(\frac{\Delta}{2} \right)$$



$$\sum M_A = 0 \quad P \times L = F \times \frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad P \times L = \frac{3EA}{4L} \times \frac{\Delta}{2} \times \frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{16PL}{3EA}$$

۴۳- در سازه متقارن نشان داده شده نیروی فنر کدام

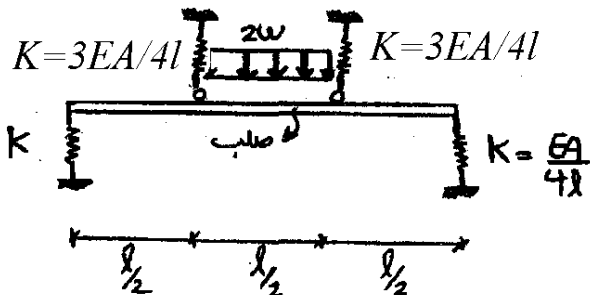
است؟ (سختی فنرها $K = \frac{EA}{4l}$ می باشد)



$$\frac{wl}{8} \quad (2) \quad \frac{wl}{4} \quad (1)$$

$$\frac{wl}{16} \quad (4) \quad \frac{wl}{12} \quad (3)$$

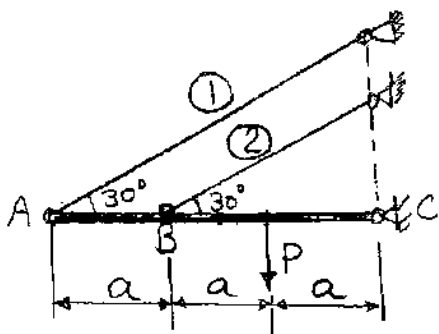
گزینه ۲ با توجه به تقارن، حرکت میله صلب افقی خواهد بود و بار به نسبت سختی بین تمامی اعضا تقسیم می شود:



$$F_{\text{فنر}} = \frac{\frac{EA}{4l}}{\frac{EA}{4l} + \frac{EA}{4l} + \frac{3EA}{4l} + \frac{3EA}{4l}} \times \left(2w \times \frac{l}{2} \right) = \frac{wl}{8}$$

سراسری ۸۶

۴۳- اگر نیروهای داخلی میله‌های ۱ و ۲ به ترتیب F_1 و F_2 باشد نسبت $\frac{F_1}{F_2}$ چقدر است؟



۰/۵ (۱)

۰/۶۶۷ (۲)

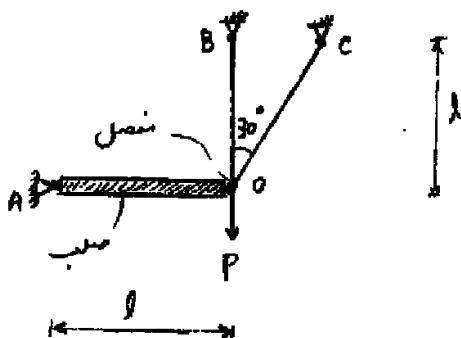
۱ (۳)

۱/۵ (۴)

گزینه ۳

سراسری ۹۱- دکتری

۴- در سازه شکل مقابل نسبت نیروی میله BO به نیروی میله CO چقدر است؟ میله‌های BO و CO از یک جنس و دارای سطح مقطع یکسانند.



$\frac{4}{3}$ (۱)

$\frac{5}{3}$ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

گزینه ۱

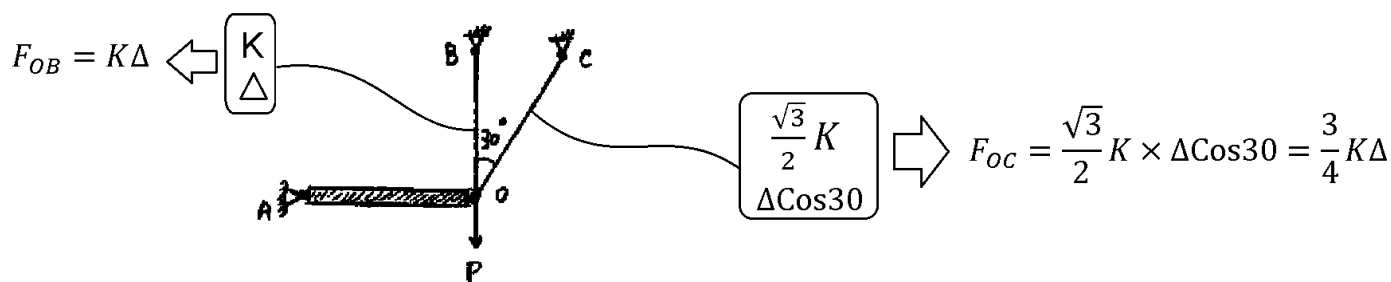
• هر دو میله کشیده می شوند.

• سختی میله ها:

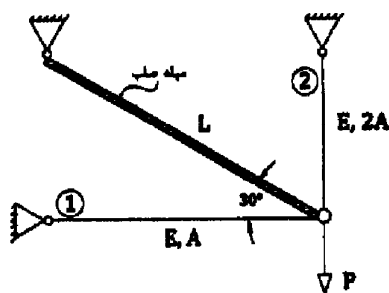
سختی میله BO برابر $K_{OB} = \frac{EA}{L} = K$ می باشد. سختی میله OC برابر $K_{OC} = \frac{EA}{\left(\frac{L}{\cos 30}\right)} = \cos 30 \frac{EA}{L} = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}K$ می باشد.

• تغییر طول میله ها:

اگر نقطه O به اندازه Δ به سمت پایین حرکت کند، افزایش طول میله OB برابر Δ و افزایش طول میله OC برابر $\Delta \cos 30$ خواهد بود.

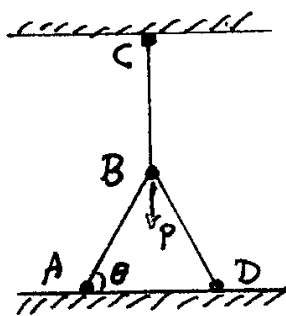


۴۶- نسبت نیرو در میله ۱ به میله ۲ کدام است؟ $\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$



- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۵- سازه‌ای متشکل از سه میله مطابق شکل زیر، تحت بار قائم P قرار گرفته است. میله‌های AB، BD مشابه و دارای طول l و سطح مقطع A_1 هستند. میله قائم BC دارای طول l و سطح مقطع A_2 می‌باشد. همه میله‌ها از یک جنس (E) بوده و در نقاط A، B، C و D دارای اتصال مفصلی هستند. نیروی محوری میله قائم BC، برابر کدام است؟



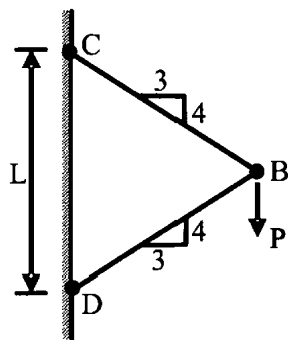
- (۱) $\frac{P}{2 \sin^2 \theta + 1}$
- (۲) $\frac{P \left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{2 \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \sin^2 \theta + 1}$
- (۳) $\frac{P \left(\frac{A_1}{A_2}\right)}{2 \sin^2 \theta + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)}$
- (۴) $\frac{P \left(\frac{A_2}{A_1}\right)}{2 \sin^2 \theta + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)}$

گزینه ۴:

بار P به نسبت سختی بین میله‌ها تقسیم می‌شود:

$$\left. \begin{aligned} K_{AB} = K_{BD} = \frac{EA_1}{L} \sin^2 \theta \\ K_{BC} = \frac{EA_2}{L} \end{aligned} \right\} \rightarrow P_{BC} = \frac{\frac{EA_2}{L}}{2 \times \frac{EA_1}{L} \sin^2 \theta + \frac{EA_2}{L}} P = \frac{\frac{A_2}{A_1}}{2 \times \sin^2 \theta + \frac{A_2}{A_1}} P$$

۱- نیروی P در نقطه B بر دو میله با سطح مقطع یکنواخت و برابر A وارد می شود. تغییر مکان عمودی نقطه B کدام است؟ (E مدول ارتجاعی میله ها می باشد).



(۱) $\frac{PL}{AE} \times 0,۸۳$

(۲) $\frac{PL}{AE} \times 0,۷۳$

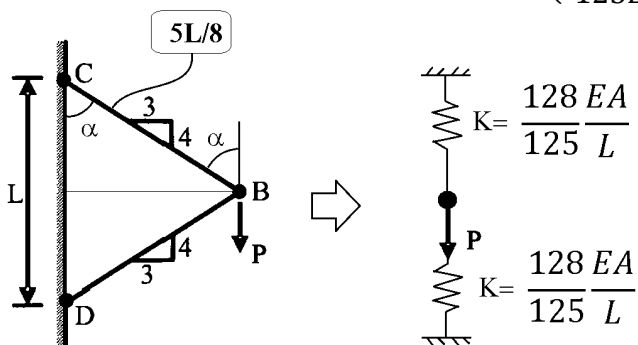
(۳) $\frac{PL}{AE} \times 0,۳۶$

(۴) $\frac{PL}{AE} \times ۱,۴$

یکی از میله ها در فشار خواهد بود و دیگری در کشش خواهد بود. با توجه به تقارن و نقطه B تنها حرکت قائم خواهد داشت. بنابراین می توان میله های مایل را با فنر معادل سازی کرد:

$$K = \frac{EA}{L} \times \cos^2 \alpha = \frac{EA}{5L} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{128 EA}{125 L}$$

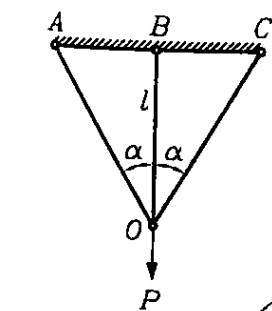
$$\Delta = \frac{P}{2K} = \frac{P}{\left(\frac{256EA}{125L}\right)} = \frac{125PL}{256EA} = 0.488 \frac{PL}{EA}$$



• نکته: این مساله به راحتی با روش کار مجازی نیز قابل حل است.

مثال

در خرابای زیر نیروی میله وسط چقدر است؟ (AE = const)



(۲) $\frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}$

(۱) $\frac{P}{1 + 2 \cos \alpha}$

(۴) $\frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$

(۳) $\frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$ ✓

در تست قبل نیروی میله های کناری چقدر است؟

(۴) $\frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$ ✓

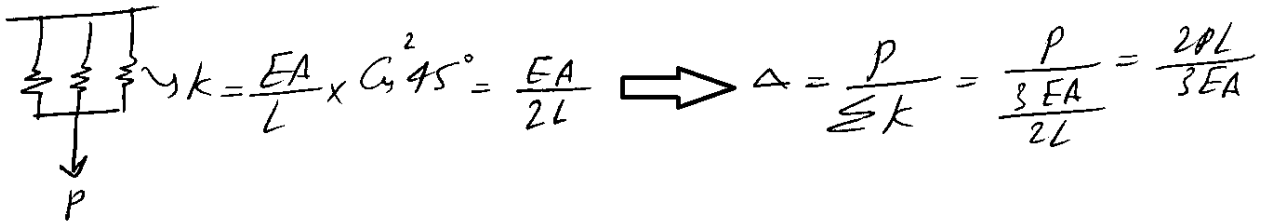
(۳) $\frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$

(۲) $\frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}$

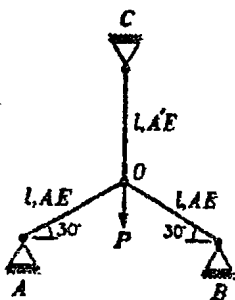
(۱) $\frac{P}{1 + 2 \cos \alpha}$

۵۵- دستگاهی توسط سه رشته سیم متشابه به طول هر یک l توسط قلاب مشترکی از سقف آویزان است. امتداد هر سیم با سقف زاویه 45° ساخته و تصاویر سه سیم بر روی سقف زاویای 120° با یکدیگر دارند. سطح مقطع سیم برابر A و مدول ارتجاعی آن E است. اگر وزن دستگاه W باشد، جابه‌جایی قائم قلاب (محل تقارب سه سیم) چقدر است؟ (سه رشته سیم هرمی ساخته‌اند که قاعده آن مثلث متساوی‌الاضلاع در تراز سقف می‌باشد و بار به رأس آن وارد می‌شود).

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{Pl}{EA} \quad (۴) \qquad \sqrt{2} \frac{Pl}{EA} \quad (۳) \qquad \frac{2}{3} \frac{Pl}{EA} \quad (۲) \checkmark \qquad \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Pl}{EA} \quad (۱)$$



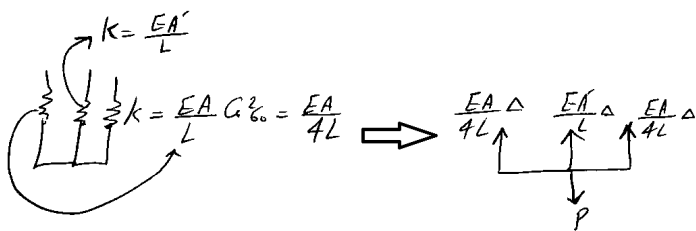
۴۷- در خریای زیر اگر نیروی میله‌ها مساوی باشند نسبت $\frac{A'}{A}$ چقدر است؟



$$1 \quad (۲) \qquad \sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \qquad 2 \quad (۳)$$

نیروی میله‌ها را محاسبه کرده و سپس برابر هم قرار می‌دهیم:



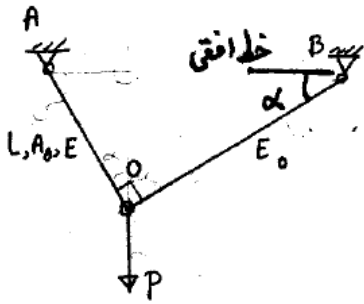
$$F_{A_0} = \frac{EA \Delta}{4L} \times \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{EA \Delta}{2L}$$

$$F_{O_C} = \frac{EA' \Delta}{L}$$

$$\rightarrow F_{A_0} = F_{O_C} \Rightarrow \frac{EA \Delta}{2L} = \frac{EA' \Delta}{L} \rightarrow \boxed{\frac{A'}{A} = \frac{1}{2}}$$

سراسری ۸۷

۵۲- در سازه نشان داده شده در شکل زیر، سطح مقطع میله OB را تعیین نمایید بصورتیکه تحت اثر بار قائم P مفصل O تغییر مکان افقی ندهد.

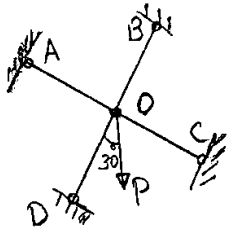


- (۱) $A_0 \frac{E}{E_0} \cot \alpha$
- (۲) $A_0 \tan \alpha$
- (۳) $A_0 \cot \alpha$
- (۴) $A_0 \frac{E}{E_0} \tan \alpha$

گزینه ۱:

سراسری ۸۸

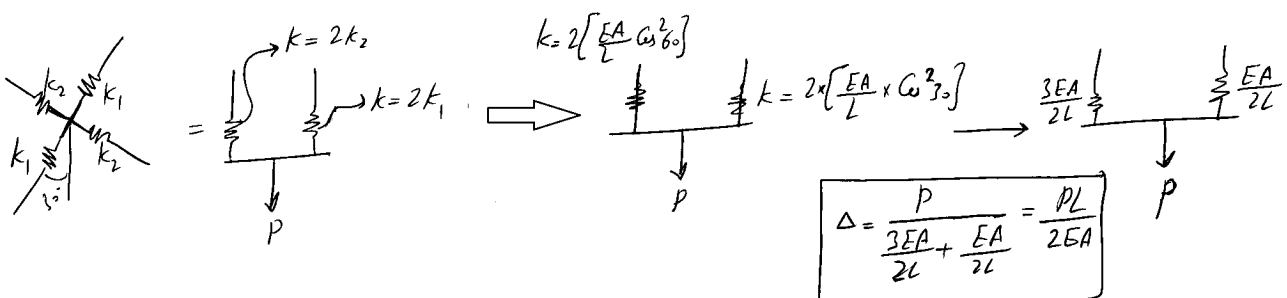
۵۳- چهار میله هم صفحه OA, OB, OC, OD هر کدام به طول L، سطح مقطع A و مدول الاستیسیته E و در O به هم مفصل شده‌اند. زاویه‌های تشکیل شده در O قائمه‌اند. تغییر مکان O برابر است با:



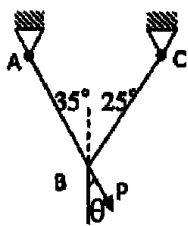
- (۱) فقط در امتداد قائم به مقدار $\frac{PL}{2AE}$ حرکت می‌کند.
- (۲) فقط در امتداد قائم به اندازه‌ی $\frac{PL}{AE} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ حرکت می‌کند.
- (۳) در امتداد قائم به مقدار $\frac{PL}{2AE}$ و در امتداد افقی به مقدار $\frac{PL}{4AE}$ حرکت می‌کند.
- (۴) در امتداد قائم به اندازه $\frac{PL}{AE} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ و در امتداد افقی به مقدار $\frac{PL}{AE\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ حرکت می‌کند.

به ظاهر نیروی وارده در راستای قائم است ولی از کجا می‌توان مطمئن شد که تغییر مکان افقی صفر است یا نه؟

تغییر مکان قائم چقدر است؟



۴۵- در شکل مقابل دو کابل AB و BC با سطح مقطع و تنش مجاز یکسان تحت نیروی P واقع شده‌اند. زاویه اعمال



نیروی P چقدر باشد تا طرح انتقادی باشد؟

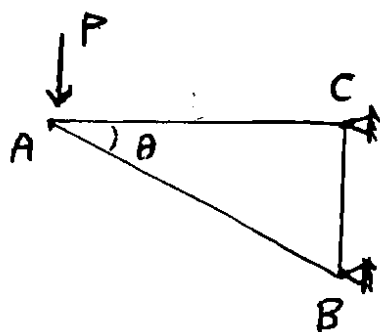
(۲) 5 درجه

(۱) 10 درجه

(۴) 35 درجه

(۳) صفر

۵۳- در خرابای زیر، چنانچه طول عضو AC برابر L باشد، جهت مینیمم شدن حجم میله AB ، زاویه θ چند درجه باید باشد؟



(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۴) $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$

با کاهش مقدار θ طول میله AB کاهش می یابد (و حجم "اولیه" آن کاهش می یابد). از طرفی با کاهش θ نیروی محوری (فشاری) عضو AB افزایش یافته و کاهش حجم آن در اثر بار P بیشتر خواهد بود. بنابراین کمترین زاویه پاسخ می باشد (گزینه ۴).

کمترین زاویه برای θ صفر می باشد که در این حالت سازه ناپایدار می شود. با نزدیک شدن θ به زاویه صفر، نیروی فشاری میله AB به بینهایت میل کرده و کمترین حجم را خواهد داشت. با توجه به اینکه مقاطع دارای ظرفیت فشاری محدودی می باشند، میله AB نمی تواند نیروی بینهایت تحمل کند. بنابراین اگر فرض کنیم تنش مجاز میله برابر σ_a می باشد، با توجه به اینکه نیروی وارد بر میله AB برابر $P/\sin\theta$ می باشد، مساحت مقطع لازم برای میله مایل بر اساس بار وارده بدست می آید:

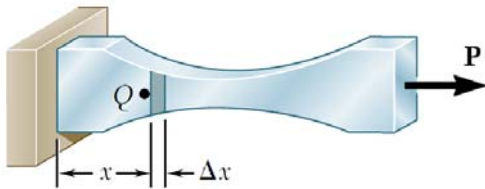
$$\left(\frac{P}{\sin\theta}\right) / A_{AB} = \sigma_a \rightarrow A_{AB} = \frac{P}{\sigma_a \sin\theta}$$

و بنابراین حجم میله برابر خواهد بود با:

$$V = A_{AB} \times L_{AB} = \frac{P}{\sigma_a \sin\theta} \times \frac{L}{\cos\theta} = \frac{PL}{\sigma_a \sin\theta \cos\theta} = \frac{2PL}{\sigma_a \sin 2\theta}$$

در رابطه فوق از کاهش حجم میله در اثر نیروی فشاری وارد بر آن صرف نظر شده است. در این حالت برای حداقل شدن حجم میله باید $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد (گزینه ۲).

۳-۳- بارگذاری محوری متغیر در طول عضو



$$\Delta = \sum \frac{P(\Delta x)}{EA} = \int_0^L \frac{P}{EA} dx$$

نحوه محاسبه تغییر طول وقتی مشخصات مقطع یا بارگذاری در طول عضو ثابت نیست:

سراسری ۸۷

۵۲- تغییر طول میله‌ای بطول L و به مدول ارتجاعی E زیر اثر نیروی محوری کششی F چقدر است؟ (مساحت مقطع میله متغیر است در یک طرف میله A_0 و در طرف دیگر $2A_0$ است و تغییرات مساحت در طول میله خطی است.)

$$\frac{FL}{A_0 E} \text{Log} 2 \quad (۱) \quad \frac{FL}{2A_0 E} \text{Log} 2 \quad (۲) \quad \frac{FL}{A_0 E} \text{Log} 2 \quad (۳) \quad \frac{FL}{2A_0 E} \text{Log} 2 \quad (۴)$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{P dx}{EA} = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{\left(A_0 + \frac{x}{L} A_0\right)} = \frac{PL}{EA_0} \int_0^L \frac{dx}{L+x}$$

$$= \frac{PL}{EA_0} \left[L \ln(L+x) \right]_0^L = \frac{PL}{EA_0} \left[L \ln(2L) - L \ln(L) \right] = \frac{PL}{EA_0} L \ln 2$$

سراسری ۸۹

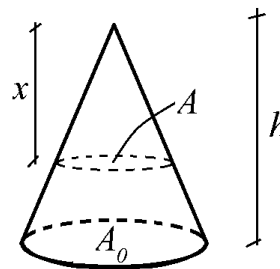
۴۹- تغییر مکان محوری رأس مخروطی توپر به ارتفاع h و شعاع قاعده R ، وزن مخصوص γ و مدول الاستیسیته E را تحت وزن مخروط به دست آورید.

$$\frac{\gamma R h}{2E} \quad (۱) \quad \frac{\gamma R h}{6E} \quad (۲)$$

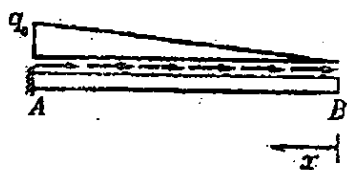
$$\frac{\gamma h^2}{6E} \quad (۳) \quad \frac{\gamma h^2}{3E} \quad (۴)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{المان}} &= \gamma \frac{Ax}{3} \\ \delta_{\text{المان}} &= \frac{P_{\text{المان}} dx}{EA} \end{aligned} \right\} \Delta = \int \frac{P dx}{EA} = \int \frac{\gamma \frac{Ax}{3} dx}{EA}$$

$$\Delta = \int \frac{\gamma x}{3E} dx = \frac{\gamma h^2}{6E}$$



۴۲- در تیر زیر که تحت اثر بار گسترده طولی $q(x) = q_0 \frac{x}{l}$ می باشد تغییر طول تیر چقدر است؟



(۲) $\frac{q_0 l^2}{2AE}$

(۱) $\frac{q_0 l^2}{8AE}$

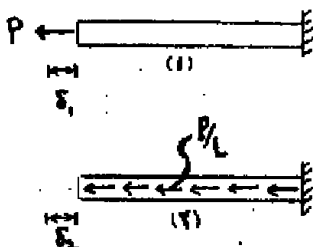
(۴) $\frac{q_0 l^2}{6AE}$

(۳) $\frac{q_0 l^2}{3AE}$

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{مان}} &= q_0 \frac{x^2}{2l} \\ \delta_{\text{مان}} &= \frac{P_{\text{مان}} dx}{EA} \end{aligned} \right\} \Delta = \int \frac{P dx}{EA} = \int \frac{q_0 \frac{x^2}{2l} dx}{EA} = \frac{q_0 l^2}{6EA}$$

سراسری ۹۲- دکتری

۷- میله‌ای به طول L ، مدول ارتجاعی E و سطح مقطع A در حالت (۱) تحت بار محوری متمرکز P در انتهای آزاد و در حالت (۲) تحت بار محوری گسترده به شدت $\frac{P}{L}$ قرار دارد. نسبت تغییر مکان محوری انتهای میله در حالت (۲) به حالت (۱) کدام است؟



($\frac{\delta_2}{\delta_1} = ?$)

(۱) $\frac{1}{4}$

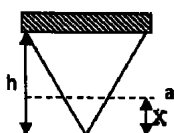
(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

تمرین: آزاد ۹۳

۴۴- مخروطی به ارتفاع h مطابق شکل به یک سطح افقی متصل است. تنش در مقطع $a-a$ به فاصله x از رأس



مخروط را به دست آورید. (وزن مخصوص مخروط = γ)

(۱) $\delta = \gamma x$

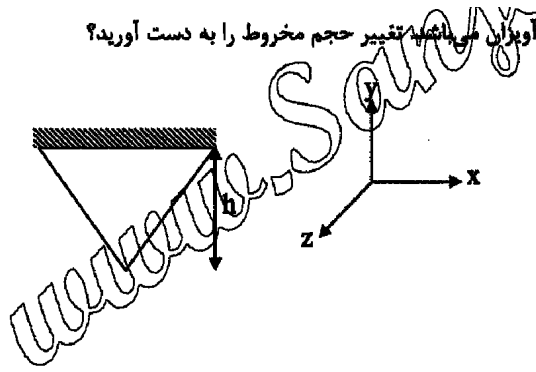
(۳) $\delta = \frac{1}{3} \gamma x$

(۲) $\delta = \frac{\gamma x}{A}$

(۴) $\delta = \frac{\gamma x}{8A}$

تمرین: آزاد ۹۳

۴۷- مخروطی مطابق شکل تحت وزن خودش آویزان می‌باشد. تغییر حجم مخروط را به دست آورید؟

(وزن مخصوص مخروط = γ)

$$\frac{1-2h}{E} \times 6\gamma \quad (۱)$$

$$\frac{8\pi h^3 d^2 (1-2\gamma)}{48E} \quad (۲)$$

$$\frac{8\pi d^2 h^2 (1-2\gamma)}{12E} \quad (۳)$$

$$\frac{8\pi h^2 d^2 (1-2\gamma)}{48E} \quad (۴)$$

آزاد ۸۹

۴۳- میله‌ای با سطح مقطع متغیر در انتهای آزاد آن تحت اثر نیروی کششی محوری قرار می‌گیرد! بطوریکه جابجایی هر نقطه از آن بصورت $\Delta(x) = kx^3$ می‌باشد که x فاصله از تکیه‌گاه است. اگر جابجایی انتهای میله برابر Δ_0 باشد معادله کرنش میله کدام است؟ (طول میله l می‌باشد)

$$\frac{6\Delta_0}{l^2} x \quad (۲) \qquad \frac{3\Delta_0}{l^3} x^2 \quad (۱)$$

$$\frac{\Delta_0}{4l^5} x^4 \quad (۴) \qquad \frac{\Delta_0}{l^4} x^3 \quad (۳)$$

ابتدا باید ضریب k را بیابیم. از آنجا که تغییر مکان انتهای میله را داده است، در انتهای میله x برابر l است:

$$kl^3 = \Delta_0 \rightarrow k = \frac{\Delta_0}{l^3}$$

بنابراین معادله تغییر مکان به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{l^3} x^3$$

حال می‌توان معادله کرنش را بدست آورد:

$$\Delta = \int \varepsilon dx \rightarrow \varepsilon = \frac{d\Delta}{dx} = 3 \frac{\Delta_0}{l^3} x^2$$

۱- تغییر مکان انتهای یک میله استوانه ای به وزن W و طول l که از تکیه گاه خود آویزان است چقدر است؟ ($AE = \text{const}$)

$$\frac{Wl}{AE} \quad (1)$$

$$\frac{Wl}{4AE} \quad (2)$$

$$\frac{Wl}{3AE} \quad (3)$$

$$\frac{Wl}{2AE} \quad (4)$$

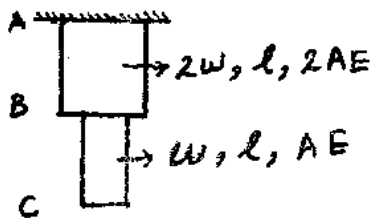
۲- در میله مقابل تغییر مکان C چقدر است؟

$$\frac{3Wl}{2AE} \quad (1)$$

$$\frac{Wl}{2AE} \quad (2)$$

$$\frac{3Wl}{4AE} \quad (3)$$

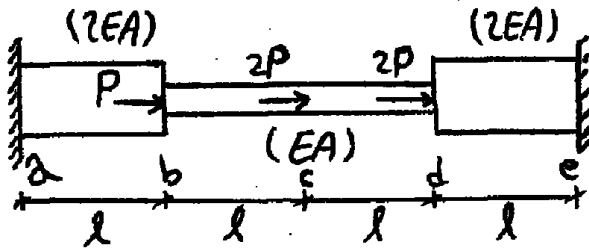
$$\frac{Wl}{AE} \quad (4)$$



۴- تغییر شکل محوری سازه های نامعین

سازگاری تغییر شکل:

آزاد ۹۲

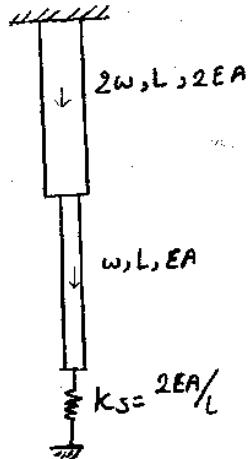


۴۱- نسبت عکس العمل محوری تکیه گاه a به عکس العمل محوری تکیه گاه e کدام است؟

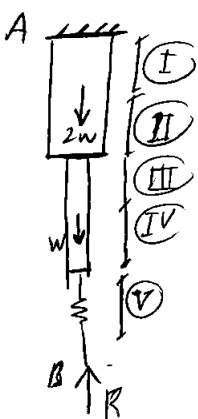
- (۱) $\frac{13}{17}$
- (۲) $\frac{11}{13}$
- (۳) $\frac{17}{44}$
- (۴) $\frac{13}{27}$

سراسری ۸۷

۵۴- در سیستم نشان داده شده در شکل روبرو، مطلوبست نیروی فنر (w و ۲w وزن قطعات نشان داده شده در شکل می باشد)



- (۱) ۳w
- (۲) $\frac{3}{4}w$
- (۳) $\frac{1}{2}w$
- (۴) $\frac{1}{3}w$



$\Delta_B = 0$

$$\rightarrow \frac{(R-3w)L/2}{2EA} + \frac{(R-w)L/2}{2EA} + \frac{(R-w)L/2}{EA} + \frac{RL/2}{EA} + \frac{R}{\frac{2EA}{L}} = 0$$

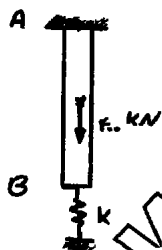
(I) (II) (III) (IV) (V)

$$\rightarrow \frac{RL}{EA} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{3wL}{2EA} = 0 \rightarrow R = \frac{3w}{4}$$

۴۹- میله AB به طول ۲ m از نقطه A به تکیه گاه و در نقطه B با یک فنر با سختی $k = 4 \times 10^9 \frac{N}{m}$ بسته شده است. اگر نیروی

۴۰۰ kN به وسط این میله اعمال شود، تغییر طول میله بر حسب متر چقدر خواهد بود؟

$4 \times 10^{-2} m^2$ = سطح مقطع میله و $200 GPa$ = ضریب الاستیسیته میله

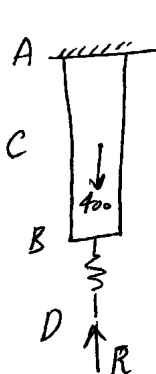


(۱) 100×10^{-6}

(۲) 25×10^{-6}

(۳) 50×10^{-6}

(۴) صفر



تکیه گاه نه از سمت و به جایش نیروی R را قرار دهیم
پس تغییر مکان تکیه گاه را برابر صفر قرار می دهیم:

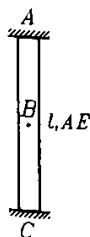
$$\Delta_D = \Delta_{DB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0$$

$$\rightarrow \frac{-R}{k} - \frac{R \times 1}{EA} - \frac{(R - 400 \times 10^3) \times 1}{EA} = 0$$

$$\rightarrow R \left(\frac{1}{4 \times 10^9} + \frac{1}{8 \times 10^9} + \frac{1}{8 \times 10^9} \right) = \frac{400 \times 10^3}{8 \times 10^9} \Rightarrow R = 100 \text{ kN}$$

$$\text{تغییر طول میله} = \Delta_{AB} = \Delta_{BC} + \Delta_{AC} = \frac{-100 \times 10^3 \times 1}{8 \times 10^9} + \frac{300 \times 10^3 \times 1}{8 \times 10^9} = 25 \times 10^{-6} \text{ m}$$

مثال: تغییر مکان نقطه B وسط میله چقدر است؟ وزن کل میله برابر W است.



(۲) $\frac{Wl}{4AE}$

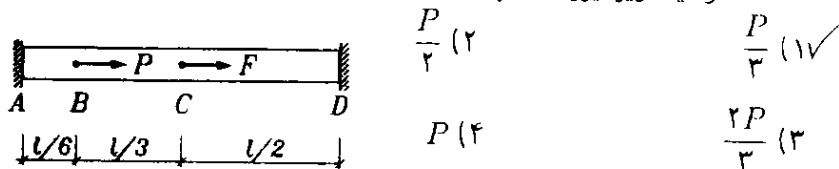
(۴) $\frac{Wl}{16AE}$

(۱) $\frac{Wl}{2AE}$

(۳) $\frac{Wl}{8AE}$

گزینه ۳:

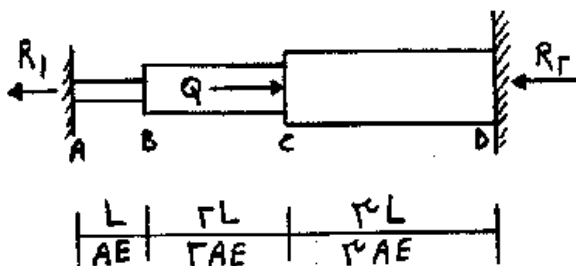
در میله زیر نیروی F چقدر باشد تا فاصله نقاط B و C تغییر نکند؟ ($AE = const$)



$$\Delta_B = \Delta_C \Rightarrow \frac{P(L/6)}{EA} = \frac{F(L/2)}{EA} \rightarrow F = \frac{P}{3}$$

تمرین: سراسری ۸۷

۵۵- کدام رابطه بین واکنش‌های سازه برقرار است؟



- (۱) $R_2 = R_1$
- (۲) $R_2 = 2R_1$
- (۳) $R_2 = 3R_1$
- (۴) $R_2 = 4R_1$

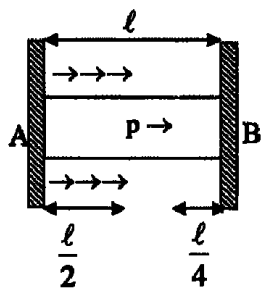
$$\Delta_A = \frac{R_1 L}{EA} + \frac{R_1 (2L)}{2EA} + \frac{(R_1 - Q) 3L}{3EA} = 0$$

$$\rightarrow R_1 = \frac{Q}{3}$$

$$\rightarrow R_2 = Q - R_1 = \frac{2Q}{3} \quad \left. \vphantom{R_2} \right\} R_2 = 2R_1$$

تمرین: آزاد ۹۳

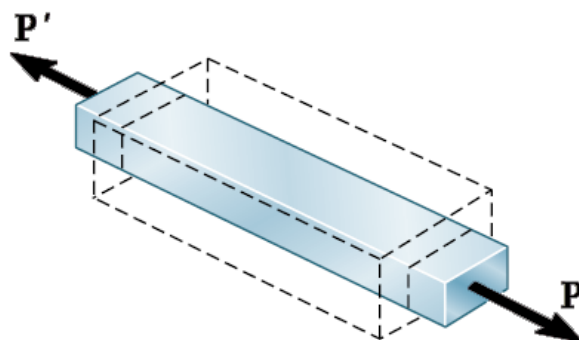
۴۶- در شکل مقابل میله AB تحت نیروی متمرکز P محوری و گسترده ثابت q_0 قرار دارد. نیروی عکس‌العمل A_x چقدر است؟



$$\frac{P}{2} + \frac{q_0 L}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{P}{4} + \frac{q_0 L}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{3P}{4} + \frac{3q_0 L}{8} \quad (۳)$$



$$\nu = \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right| = - \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}$$

محدوده ضریب پواسون: $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$

برای مواد تراکم ناپذیر ν برابر 0.5 می باشد.

اگر عضوی تحت اثر تنشهای چند جهته باشد:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

در بارگذاری تک محوری (اگر فقط σ_x داشته باشیم):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right|$$

مثال

میله‌ای به طول 20 cm و قطر 4 cm که تحت اثر نیروی محوری کششی 4 تن است افزایش طول

0.3 cm و کاهش قطر 0.0018 cm دارد. ضریب پواسون میله چقدر است؟

0,35 (4)

0,33 (3)

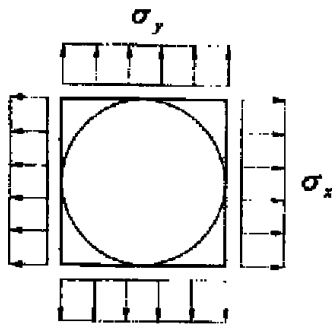
0,3 (2) ✓

0,25 (1)

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{0.03}{20} = 0.0015 \\ \varepsilon_y = -\frac{0.0018}{4} = -0.00045 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x \\ \rightarrow 0.00045 = \nu \times 0.0015 \end{array} \rightarrow \nu = 0.3$$

سراسری ۹۲ - دکتری

۵- صفحه‌ای نازک و مربع شکل به ابعاد $1000\text{mm} \times 1000\text{mm}$ مفروض است. دایره‌ای به قطر 1000mm روی صفحه ترسیم شده است (دایره محاطی). اضلاع قائم و افقی صفحه به ترتیب تحت تنش‌های کششی $\sigma_x = 80 \times 10^6 \text{MPa}$ و $\sigma_y = 40 \times 10^6 \text{MPa}$ قرار می‌گیرند. اندازه قطر بزرگ‌تر بیضی حاصل از تغییر شکل دایره چند میلی‌متر است؟ مدول ارتجاعی $E = 60 \times 10^9 \text{GPa}$ و ضریب پواسون $\nu = 0.25$ است.



$$100/0.33 \quad (1)$$

$$100/117 \quad (2)$$

$$100/0.67 \quad (3)$$

$$100/1.33 \quad (4)$$

تمرین: سراسری ۷۹

ورقی به ابعاد $20 \times 20 \text{cm}$ تحت تنش در دو جهت مطابق شکل قرار دارد. اگر دایره‌ای به قطر 10cm را در مرکز این ورق داشته باشیم، پس از اعمال تنشها این دایره چه وضعیتی را پیدا می‌کند؟

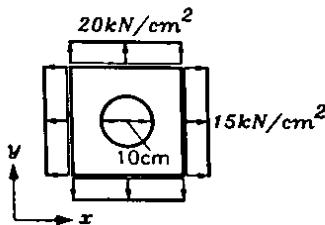
$$(E = 2 \times 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \nu = 0.3)$$

$$(1) \text{ دایره‌ای به قطر } 10.006125 \text{cm}$$

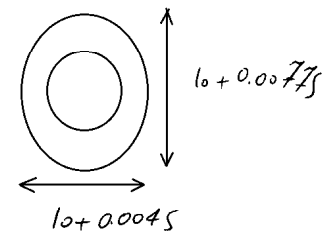
$$(2) \text{ دایره‌ای به قطر } 10.00875 \text{cm}$$

$$(3) \text{ بیضی به قطرهای } 10.001 \text{cm} \text{ و } 10.00075 \text{cm} \text{ در جهت محور } X \text{ و } Y \text{ به ترتیب}$$

$$(4) \text{ بیضی با قطر } 10.00045 \text{cm} \text{ و } 10.000775 \text{cm} \text{ در جهت محور } X \text{ و } Y \text{ به ترتیب}$$



$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{15}{2 \times 10^4} - 0.3 \times \frac{20}{2 \times 10^4} = 4.5 \times 10^{-4} \\ \epsilon_y &= \frac{20}{2 \times 10^4} - 0.3 \times \frac{15}{2 \times 10^4} = 7.75 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= 4.5 \times 10^{-4} \times 10 = 0.0045 \text{cm} \\ \Delta y &= 7.75 \times 10^{-4} \times 10 = 0.00775 \text{cm} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

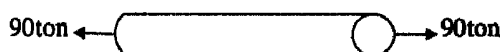


تمرین: آزاد ۹۳

۵۸- یک میله به قطر 10cm تحت اثر نیروی کششی قرار داد. تغییر قطر میله بعد از اعمال نیرو کدام است؟

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\mu = 0.29$$



$$0.00166 \quad (1)$$

$$0.0166 \quad (2)$$

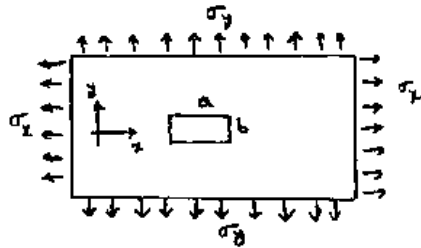
$$0.166 \quad (3)$$

$$1.66 \quad (4)$$

کرنش سطحی: $\epsilon_A = \epsilon_x + \epsilon_y$

سراسری ۹۴

۴۷- پیش از اعمال تنش های σ_x, σ_y به صفحه‌ی نازکی، مستطیلی به ابعاد a و b مطابق شکل بر روی آن علامت زده می‌شود. اگر مساحت مستطیل پس از اعمال تنش‌ها بدون تغییر بماند، کدام مورد صحیح است؟ (۷ ضریب پواسون صفحه است و $\sigma_z = 0$)



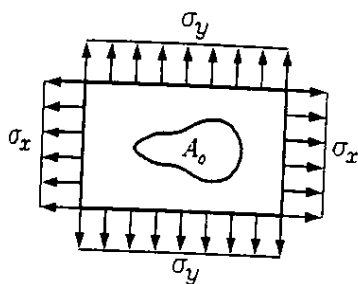
- (۱) $a\sigma_x + b\sigma_y = 0$
- (۲) $\sigma_x + \sigma_y = 0$
- (۳) $\sigma_x - \sigma_y = 0$
- (۴) $\nu = \frac{1}{2}$

از آنجا که سطح ab تغییر نکرده است، بنابراین کرنش سطحی در آن باید برابر صفر باشد:

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_x + \epsilon_y = \frac{(1 - \nu)(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0 \rightarrow \sigma_x + \sigma_y = 0$$

تمرین:

تغییر سطح شکل رسم شده بر روی صفحه مستطیلی زیر چقدر است؟ (سطح اولیه شکل A_0 ،



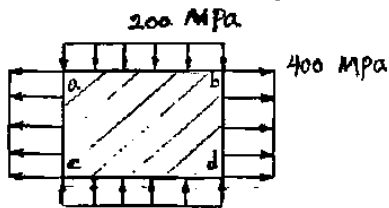
مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می‌باشد)

- (۱) $\frac{1 - \nu}{2E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$
- (۲) $\frac{1 - 2\nu}{2E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$
- (۳) $\frac{1 - \nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$ ✓
- (۴) $\frac{(1 - 2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y)A_0$

$$\Delta A = (\epsilon_x + \epsilon_y)A_0 = \left(\frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}\right)A_0 = (\sigma_x + \sigma_y)\left(\frac{1 - \nu}{E}\right)A_0$$

تمرین: سراسری ۸۱

۴۴- یک ورق فولادی به مساحت 150cm^2 و ضخامت 1cm تحت اثر تنش‌های یکنواختی مطابق شکل قرار گرفته است. مقدار تغییر مساحت بر حسب mm^2 کدام است؟ ($E = 200\text{Gpa}$, $\nu = 0.3$)



- (۱) $4/80$
- (۲) $5/82$
- (۳) $10/5$
- (۴) $11/25$

$$\begin{aligned} \Delta A = (\epsilon_x + \epsilon_y)A &\rightarrow \Delta A = \left[\left(\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E}\right) + \left(\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E}\right)\right]A = \left[\frac{\sigma_x}{E}(1 - \nu) + \frac{\sigma_y}{E}(1 - \nu)\right]A \\ &= \left[\frac{400}{200000}(0.7) + \frac{-200}{200000}(0.7)\right] \times 150 = 0.105\text{cm} = 10.5\text{mm}^2 \end{aligned}$$

مثال

یک میله با مقطع مربعی و سطح مقطع A تحت اثر بار محوری P قرار دارد.

تغییر سطح مقطع این میله چقدر است؟

$$\frac{\nu P}{E} \quad (۱) \quad \frac{2\nu P}{E} \quad (۲) \quad \sqrt{\frac{\nu PA}{E}} \quad (۳) \quad 2\sqrt{\frac{\nu PA}{E}} \quad (۴)$$

$$\Delta A = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)A = \left(-\nu \frac{P}{EA} - \nu \frac{P}{EA}\right)A = -\frac{2\nu P}{E}$$

منظور از تنش مسطح و کرنش مسطح چیست؟

مثال

در حالت تنش مسطح در صفحات اصلی xy ، ε_z برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (۱) \quad \frac{-\nu}{2(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (۲) \quad -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (۳) \quad \frac{-\nu}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (۴)$$

در حالت تنش مسطح $\sigma_z = 0$ می باشد.

بنابراین مقدار کرنش ε_z برابر خواهد بود با:

$$\varepsilon_z = 0 - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

تمامی گزینه ها بر حسب $\varepsilon_x + \varepsilon_y$ می باشد.

بنابراین مقدار $\varepsilon_x + \varepsilon_y$ را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \right\} \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\sigma_x(1-\nu) + \sigma_y(1-\nu)}{E} = (\sigma_x + \sigma_y) \frac{(1-\nu)}{E}$$

با مقایسه دو رابطه فوق داریم:

$$\sigma_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

مثال:

در حالت تنش مسطح در صفحه xy کدامیک از گزینه ها شرط کافی برای صفر شدن ε_z است؟

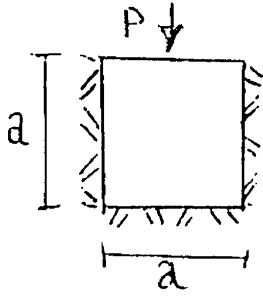
$$\tau_{xy} = 0 \text{ و } \sigma_y = \sigma_x \quad (۱) \quad \tau_{xy} = 0 \quad (۲)$$

$$\sigma_y = -\sigma_x \quad (۴) \quad \tau_{xy} = 0 \text{ و } \sigma_y = -\sigma_x \quad (۳)$$

در حالت تنش مسطح $\sigma_z = 0$ می باشد.

$$\varepsilon_z = 0 - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \xrightarrow{\varepsilon_z=0} -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = 0 \rightarrow \sigma_x = -\sigma_y$$

۴۸- مکعبی به ضلع a در محفظه‌ای مطابق شکل قرار داده شده به طوری که تغییر طول آن فقط در جهت قائم امکان‌پذیر و تحت فشار یکنواخت P بر سطح فوقانی، قرار گرفته است. تغییر ضلع قائم مکعب کدام مقدار زیر است؟ (ν ضریب پواسون می‌باشد).

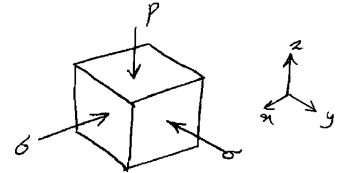


$$\frac{P \cdot a}{E} \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \quad (1)$$

$$\frac{P \cdot a}{E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \quad (2)$$

$$\frac{P \cdot a}{E} \frac{1-\nu}{1+\nu^2} \quad (3)$$

$$\frac{P \cdot a}{E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{1+\nu^2} \quad (4)$$



با توجه به اینکه تغییر شکل در راستای x و y صفر است، کرنش نیز در این راستاها صفر خواهد بود:

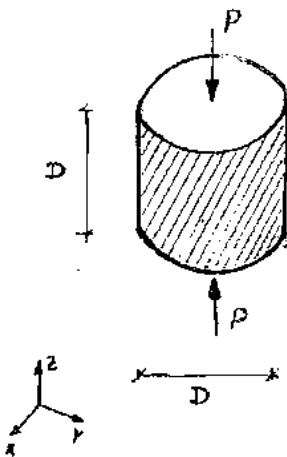
$$\varepsilon_x = \left(\frac{-\sigma}{E}\right) - \nu \left(\frac{-\sigma}{E}\right) - \nu \left(\frac{-P}{E}\right) = 0 \rightarrow \sigma = \frac{\nu P}{1-\nu}$$

$$\varepsilon_z = \left(\frac{-P}{E}\right) - \nu \left(\frac{-\sigma}{E}\right) - \nu \left(\frac{-\sigma}{E}\right) = -\frac{P}{E} \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

$$\Delta_z = \varepsilon_z a = -\frac{Pa}{E} \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

تمرین: سراسری ۸۶

۵۱- نمونه استوانه‌ای شکل مقابل با قطر و ارتفاع D زیر اثر نیروی محوری P که بطور یکنواخت در مقطع تقسیم شده از بالا و پایین قرار گرفته است. در صورتی که از تغییر شکل جانی استوانه جلوگیری شود، مطلوبست تغییر طول استوانه:



$$\Delta_z = \frac{4P}{\pi D^2 E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \quad (1)$$

$$\Delta_z = \frac{4P}{\pi D^2 E} \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \quad (2)$$

$$\Delta_z = \frac{4P}{\pi D E} \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \quad (3)$$

$$\Delta_z = \frac{4P}{\pi D E} \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \quad (4)$$

گزینه ۳:

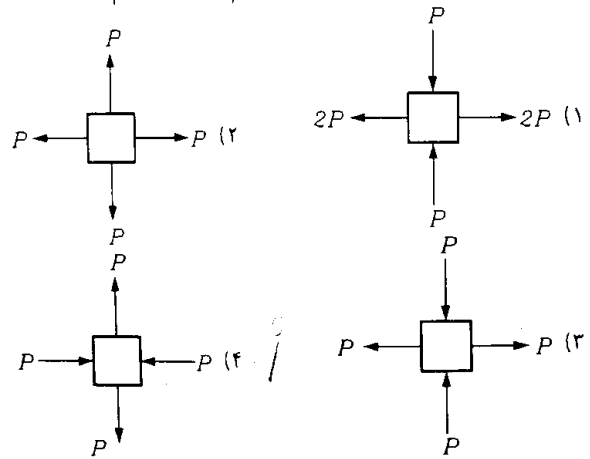
کرنش حجمی، ضریب انبساط حجمی:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

نکته: تغییر حجم نسبی المان به مجموع تنش‌های اصلی وارد شده وابسته است.

مثال

در کدامیک از المانهای زیر تغییر حجم ماکزیمم است؟



$$\Delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) V \rightarrow \Delta V = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \frac{(1-2\nu)}{E} \times V$$

نکته: هر چه جمع تنشها (یا آن بیشتر باشد) تغییر حجم آن بیشتر است

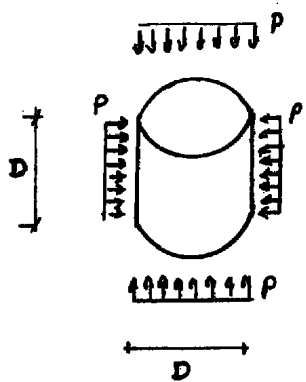
$$\Sigma P = P + P = 2P \leftarrow (2) \quad \Sigma P = (2P - P) = P \leftarrow (1)$$

$$\Sigma P = P - P = 0 \leftarrow (4) \quad \Sigma P = (P - P) = 0 \leftarrow (3)$$

سراسری ۹۱

۵۵- عضو استوانه‌ای شکل با قطر و ارتفاع D و مشخصات ماده برابر E و $\nu = 0.25$ تحت فشار همه جانبه P می‌باشد. تغییر حجم

استوانه کدام رابطه زیر است؟

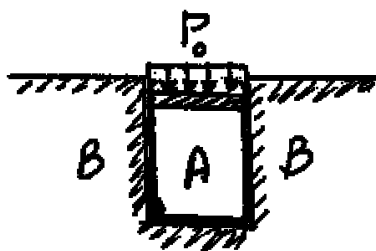


- (۱) $\frac{9\pi D^3 \cdot P}{8E}$
- (۲) $\frac{3\pi D^3 \cdot P}{8E}$
- (۳) $\frac{9\pi D^3 \cdot P}{16E}$
- (۴) $\frac{3\pi D^3 \cdot P}{16E}$

$$\Delta V = \epsilon_v \times V = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E} \times \left[\frac{\pi D^2}{4} \times h \right]$$

$$\Delta V = \frac{0.5(-3P)}{E} \frac{\pi D^3}{4} = \frac{-3P \pi D^3}{8E}$$

۱۰- در شکل نشان داده شده هرگاه دیواره B صلب فرض شود و مخزن استوانه‌ای A تغییر شکل پذیر باشد، فشار جانبی مابین استوانه A و دیواره B برحسب P_c و ضریب پواسون ν کدام است؟



$$\frac{P_c}{(1-\nu)} \quad (1)$$

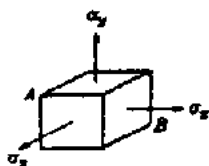
$$\frac{P_c}{(1+\nu)} \quad (2)$$

$$\frac{\nu P_c}{(1+\nu)} \quad (3)$$

$$\frac{\nu P_c}{(1-\nu)} \quad (4)$$

آزاد ۸۸

۴۵- در المان مکعبی زیر تغییر سطح جانبی المان چقدر است؟ (بعد المان a مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می باشد).



$$\frac{4(1-\nu)a^2}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1)$$

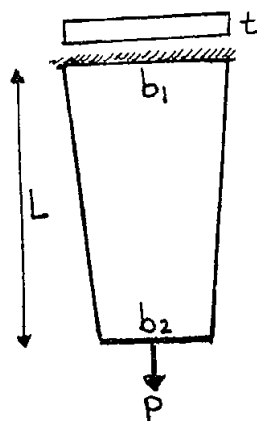
$$\frac{8(1-\nu)a^2}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2)$$

$$\frac{4(1-2\nu)a^2}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3)$$

$$\frac{8(1-2\nu)a^2}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4)$$

سراسری ۸۸

یک ورق فولادی با ضریب ارتجاعی E ، ضریب پواسون ν ، ضخامت ثابت t و عرض متغیر نشان داده شده در شکل که از وزن آن صرفنظر گردیده است تحت اثر نیروی محوری P قرار گرفته است. تغییر حجم آن چقدر است؟



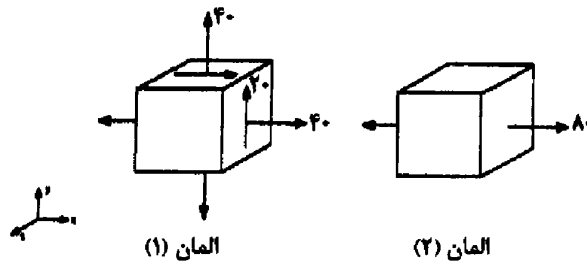
$$\frac{PL}{E}(1-\nu) \quad (1)$$

$$\frac{PL}{E}(1-2\nu) \quad (2)$$

$$\frac{PL}{\nu E}(1-\nu) \quad (3)$$

$$\frac{(b_1 + b_2)PL}{\nu Et}(1-2\nu) \quad (4)$$

۴۷- در دو المان نشان داده شده چه رابطه‌ای بین کرنش حجمی دو المان وجود دارد؟



$$\epsilon_{V1} = 1/2 \epsilon_{V2} \quad (1)$$

$$\epsilon_{V1} = \epsilon_{V2} \quad (2)$$

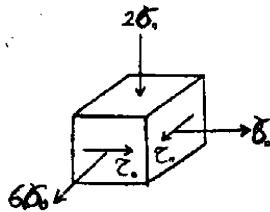
$$\epsilon_{V1} = 1/3 \epsilon_{V2} \quad (3)$$

$$\epsilon_{V1} = 2 \epsilon_{V2} \quad (4)$$

تمرین: آزاد ۹۱

۴۴- اگر بعد از اعمال تنش‌ها، حجم المان نشان داده شده نیم درصد افزایش یابد مقدار σ_0 چند مگاپاسکال می‌باشد؟

$$(E = 6 \times 10^4 \text{ MPa}, \nu = 0.2)$$



۷۵ (۲)

۵۰ (۱)

۲۰۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

گزینه ۳

درصد تغییر حجم المان (کرنش حجمی) برابر است با:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

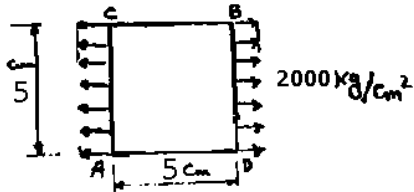
$$\rightarrow 0.005 = \frac{1-0.4}{6 \times 10^4} (6\sigma_0 + \sigma_0 - 2\sigma_0) \rightarrow \sigma_0 = 100 \text{ MPa}$$

نحوه تعیین تغییر قطر:

$$c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} c \cdot dc = a \cdot da + b \cdot db \rightarrow dc = \frac{a \cdot da + b \cdot db}{c} = \frac{a \cdot da + b \cdot db}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

سراسری ۸۱

۳۵- ورقی مطابق شکل، تحت تنش تک محوری قرار گرفته است، تغییر قطر AB چند cm است؟ ($\nu = 0.3$, $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)



- ۱) $2/27 \times 10^{-3}$
- ۲) $3/54 \times 10^{-3}$
- ۳) 5×10^{-3}
- ۴) $7/70 \times 10^{-3}$

$$c \times c' = a \times a' + b \times b'$$

$$5\sqrt{2} \times c' = 5 \times a' + 5 \times b'$$

پس اگر a' و b' را داشته باشیم، مقدار تغییر قطر بدست می آید:

$$b' = 5 \times \varepsilon_y = 5 \times \left(-0.3 \times \frac{2000}{2 \times 10^6} \right) = -1.5 \times 10^{-3}$$

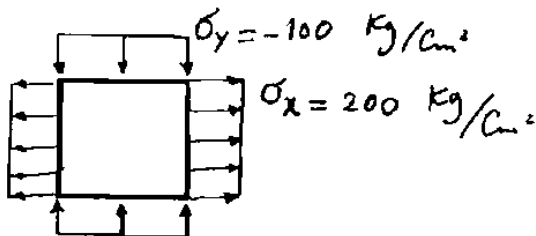
$$a' = 5 \times \varepsilon_x = 5 \times \left(\frac{2000}{2 \times 10^6} \right) = 5 \times 10^{-3}$$

$$c' = \frac{\sqrt{2}}{2} (a' + b') = 2.47 \times 10^{-3}$$

تمرین: سراسری ۸۳

۵۲- صفحه ای مربع شکل به اضلاع ۱۰ سانتیمتر تحت تاثیر تنشهای σ_x و σ_y مطابق شکل قرار دارد. تغییر طول قطر این صفحه چقدر است؟

$$(\nu = 0.3, E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2)$$



- ۱) $1/23 \times 10^{-4} \text{ cm}$
- ۲) $2/47 \times 10^{-4} \text{ cm}$
- ۳) $2/94 \times 10^{-4} \text{ cm}$
- ۴) $7/41 \times 10^{-4} \text{ cm}$

$$10\sqrt{2} \times \Delta_{\text{قطر}} = 10 \times \Delta_x + 10 \times \Delta_y$$

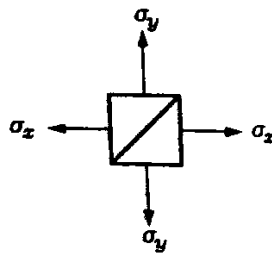
پس اگر Δ_x و Δ_y را داشته باشیم، مقدار تغییر قطر بدست می آید:

$$\Delta_x = 10 \times \varepsilon_x = 10 \times \left(\frac{200}{2 \times 10^6} - 0.3 \times \frac{-100}{2 \times 10^6} \right) = 11.5 \times 10^{-4}$$

$$\Delta_y = 10 \times \varepsilon_y = 10 \times \left(\frac{-100}{2 \times 10^6} - 0.3 \times \frac{200}{2 \times 10^6} \right) = -8 \times 10^{-4}$$

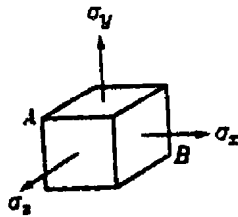
$$\Delta_{\text{قطر}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Delta_x + \Delta_y) = 2.47 \times 10^{-4}$$

تغییر طول قطر المان مربعی شکل زیر (به ضلع a) چقدر است؟



$$\begin{aligned} & \sqrt{2}a(1-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (1) \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}a(1-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (2\sqrt{2}) \\ & a(1-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (2) \\ & \frac{a}{\sqrt{2}}(1-\nu)\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad (4) \end{aligned}$$

۴۵- در المان مکعبی زیر تغییر طول قطر AB چقدر است؟ (بعد المان a مدول یانگ E و ضریب پواسون ν می باشد)



$$\frac{\sqrt{3}(1-\nu)a}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}(1-\nu)a}{3E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}(1-2\nu)a}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}(1-2\nu)a}{3E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3)$$

$$a\sqrt{3} \times \Delta_{\text{قطر}} = a \times \Delta_x + a \times \Delta_y + a \times \Delta_z = a \times (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z)$$

$$\Delta_{\text{قطر}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z)$$

$$\Delta_x + \Delta_y + \Delta_z = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)a = \frac{(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}a$$

$$\Delta_{\text{قطر}} = \frac{\sqrt{3}a(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3E}$$

۸- ظرفی استوانه‌ای با مقطع دایره با شعاع خارجی یک متر توسط تسمه‌های فولادی با سطح مقطع پنجاه میلیمتر مربع (عرض ۲۵ و ضخامت دو میلیمتر) به طور محکم دور پیچ شده است. اگر بر اثر فشار داخلی قطر خارجی ظرف به اندازه یک میلیمتر افزایش یابد، افزایش نیرو در هر تسمه بر حسب kN حدوداً چقدر است؟ مدول ارتجاعی فولاد $E = 200 \text{ GPa}$ می‌باشد.

(۱) ۲/۵

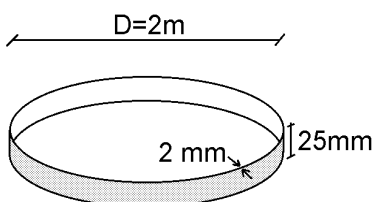
(۲) ۵

(۳) ۱۰

(۴) ۲۰

$$\Delta = \pi(D+1) - \pi D = 1\pi \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta}{L} = \frac{1\pi}{\pi D} = 0.0005$$

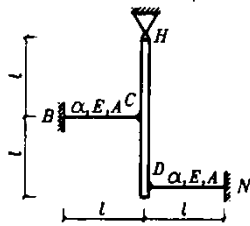
$$\rightarrow F = \sigma A = \varepsilon EA = 0.0005 \times 200 \times 10^9 \times 50 \times 10^{-6} = 5 \text{ kN}$$



$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T \rightarrow \Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

سراسری ۸۰

در شکل مقابل میله صلب HD توسط میله‌های مشابه BC و DN نگهداری شده‌است. اگر درجه حرارت میله BC به اندازه $+\Delta T$ افزایش یابد، عکس‌العمل تکیه‌گاه H کدام است؟



$$H_x = 0,4 \Delta T E A \alpha \quad (1)$$

$$H_x = 0,5 \Delta T E A \alpha \quad (2)$$

$$H_x = \Delta T E A \alpha \quad (3)$$

$$H_x = 2 \Delta T E A \alpha \quad (4)$$

سراسری ۸۲

۴۵- تنش در میله‌های شکل روبرو به شرح زیر است:

$$\sigma_r = 0 \text{ و } \sigma_1 = \sigma_3 = 100 \text{ MPa}$$

درجه حرارت هر سه میله ۲۰ درجه سانتیگراد افزایش می‌یابد، تنش در هر میله بر حسب MPa چقدر است؟

$$\alpha = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}, E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$$

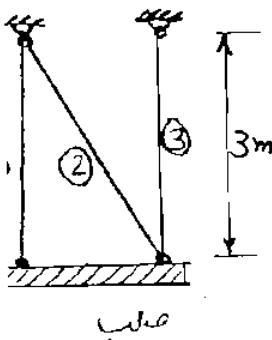
$$\sigma_r = 0 \text{ و } \sigma_1 = \sigma_3 = 100 \quad (1)$$

$$\sigma_r = 44 \text{ و } \sigma_1 = \sigma_3 = 144 \quad (2)$$

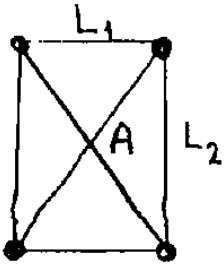
$$\sigma_r = -44 \text{ و } \sigma_1 = \sigma_3 = 56 \quad (3)$$

$$\sigma_r = -56 \text{ و } \sigma_1 = 0 \text{ و } \sigma_3 = 144 \quad (4)$$

گزینه ۱:



۴۸- در شکل رویو جنس و سطح مقطع همه میله ها یکی است. دو میله پایل در A بهم اتصالی ندارند. در اثر افزایش درجه حرارت چه تنشی در میله ها بوجود می آید؟



(۱) تنشی ایجاد نمی شود.

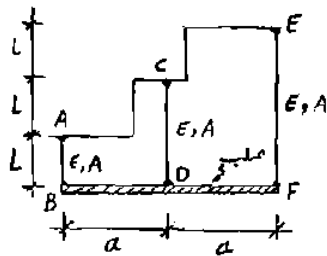
(۲) در تمام میله ها تنش فشاری ایجاد می شود.

(۳) در میله های مایل تنش کششی و در بقیه میله ها تنش فشاری ایجاد می شود.

(۴) در میله های مایل تنش فشاری و در بقیه میله ها تنش کششی ایجاد می شود.

از آنجا که به کل سازه حرارت اعمال می شود و جنس هم یکی است، گزینه ۱ صحیح است.

در شکل مقابل چنانچه حرارت میله CD به اندازه ΔT افزایش یابد، میزان تغییر مکان نقطه D چقدر می باشد؟



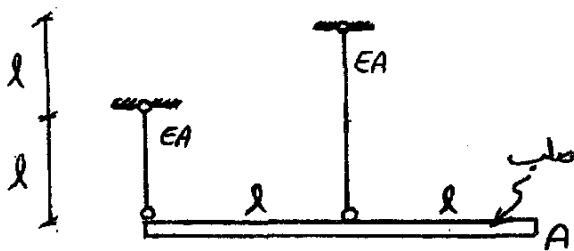
(۱) $\alpha L \Delta T$

(۲) $\frac{1}{3} \alpha L \Delta T$

(۳) $2 \alpha L \Delta T$

(۴) $\frac{2}{3} \alpha L \Delta T$

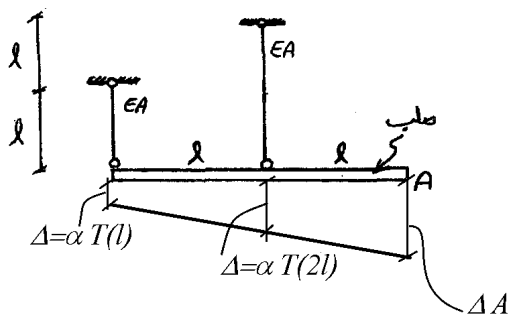
۴۴- چنانچه دمای هر دو میله به اندازه ΔT افزایش داده شود تغییر مکان گره A کدام است؟ (ضریب انبساط حرارتی میله‌ها α می‌باشد)



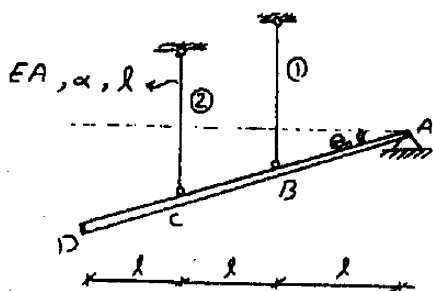
(۱) $2\alpha \Delta T l$ (۲) $3\alpha \Delta T l$

(۳) $4\alpha \Delta T l$ (۴) $5\alpha \Delta T l$

گزینه ۲: با توجه به شکل زیر، تغییر مکان گره A برابر $3\alpha T l$ خواهد بود.



۴۲- در باره نشان داده شده میله صلب ABCD با راستای افق زاویه کوچکی θ دارد. اگر درجه حرارت میله ۲ را به اندازه ΔT کاهش دهیم تا میله صلب در راستای افق قرار گیرد، آنگاه نیروی ایجاد شده در میله ۲ کدام است؟ (میله‌های ۱ و ۲ مشابه و دارای طول یکسان می‌باشند)



(۱) $\frac{1}{5} \alpha \Delta T E A$ (۲) $\frac{2}{5} \alpha \Delta T E A$ (۳) $\frac{3}{5} \alpha \Delta T E A$ (۴) $\frac{4}{5} \alpha \Delta T E A$

گزینه ۱ صحیح است.

در صورتی که تغییر مکان میله صلب را مطابق شکل بر حسب Δ نمایش دهیم، می‌توان نیروهای وارد بر میله صلب را محاسبه کرد:

$$F_2 = k \delta = \frac{EA}{L} (\alpha \Delta T L - 2\Delta)$$

$$F_1 = k \delta = \frac{EA}{L} \Delta$$

حال با لنگر گیری حول نقطه A می‌توان مقدار Δ را محاسبه کرد:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_2 \times (2L) - F_1 \times (L) = 0$$

$$\rightarrow (\alpha \Delta T L - 2\Delta) \times (2L) - (\Delta) \times (L) = 0$$

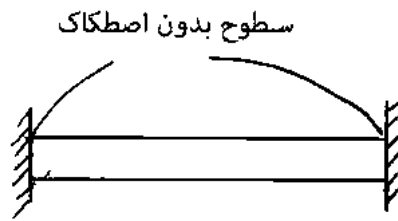
$$\rightarrow \Delta = \frac{2\alpha \Delta T L}{5}$$

و بنابراین مقدار F_2 برابر است با:

$$F_2 = \frac{EA}{L} (\alpha \Delta T L - 2\Delta) = \frac{EA}{L} \left(\alpha \Delta T L - \frac{4\alpha \Delta T L}{5} \right) = \frac{\alpha \Delta T E A}{5}$$

سراسری ۹۴

۵۲- میله‌ای استوانه‌ای مطابق شکل زیر بین دو تکیه‌گاه در دمای T_0 بدون نیروی محوری داخلی قرار گرفته است. اگر شعاع اولیه میله R_0 باشد، تغییر شعاع میله در اثر افزایش دمای ΔT کدام است؟ E مدول الاستیسیته، ν نسبت پواسون، $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ مدول برشی و α ضریب انبساط حرارتی می‌باشند.



$$\frac{\nu G}{E} \alpha \Delta T R_0 \quad (1)$$

$$\frac{\nu E}{G} \alpha \Delta T R_0 \quad (2)$$

$$\frac{E}{\nu G} \alpha \Delta T R_0 \quad (3)$$

$$\frac{G}{\nu E} \alpha \Delta T R_0 \quad (4)$$

تغییر شعاع میله برابر است با:

$$\Delta R = \varepsilon_R \times R_0$$

برای بدست آوردن کرنش در راستای شعاع لازم است تنش طولی میله بدست آید. برای بدست آوردن تنش طولی باید سازگاری تغییر شکل در انتهای (تکیه‌گاه) میله را بررسی کنیم. با توجه به اینکه کرنش در راستای طولی صفر است (میله دوسرگیردار)، داریم:

$$\varepsilon_L = \alpha \Delta T - \frac{\sigma_L}{E} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_L}{E} = -\alpha \Delta T$$

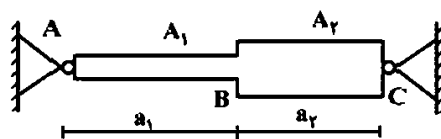
مقدار کرنش شعاعی برابر است با:

$$\varepsilon_L = \alpha \Delta T - \nu \frac{\sigma_L}{E} = (1 + \nu) \alpha \Delta T$$

$$\Delta R = \varepsilon_R \times R_0 = (1 + \nu) \alpha \Delta T R_0 = \frac{E}{2G} \alpha \Delta T R_0$$

دکتری ۹۶

۹- میله AC بین دو تکیه‌گاه ثابت A و C قرار گرفته است. در اثر تغییر درجه حرارت، نسبت تنش ایجاد شده در قسمت AB به تنش ایجاد شده در قسمت BC کدام است؟ A_1 و A_2 به ترتیب مساحت مقطع قسمت‌های AB و BC می‌باشند.



(۱) یک

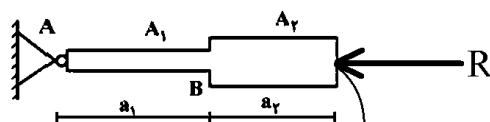
$$\frac{A_2 a_1}{A_1 a_2} \quad (2)$$

$$\frac{A_2 a_2}{A_1 a_1} \quad (3)$$

$$\frac{A_2}{A_1} \quad (4)$$

گزینه ۴

با توجه به شکل زیر می‌توان مقدار R را بدست آورد.



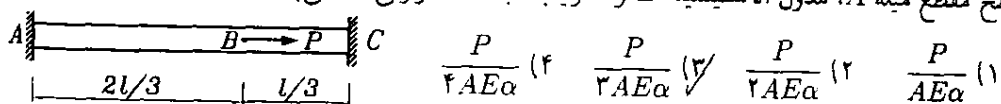
$$\Delta = \Delta_{\text{حرارت}} - \Delta_R = 0$$

• ولی با توجه به اینکه نسبت تنشها را خواسته نیازی به محاسبه R نیست:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{R}{A_1} \\ \sigma_2 &= \frac{R}{A_2} \end{aligned} \right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

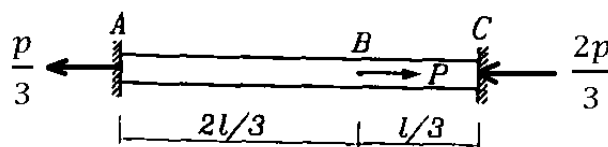
میله زیر را باید حداقل چند درجه سانتی‌گراد گرم کرد تا هیچ نقطه‌ای از آن تحت کشش نباشد؟

(سطح مقطع میله A ، مدول الاستیسیته E و ضریب انبساط حرارتی α می‌باشد)



تحت بار P :

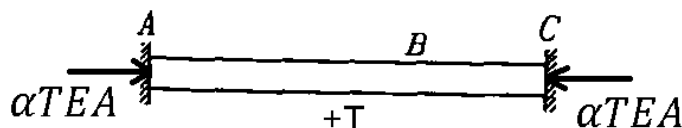
قسمت BC تحت فشار $\frac{2p}{3}$ قسمت AB تحت کشش $\frac{p}{3}$



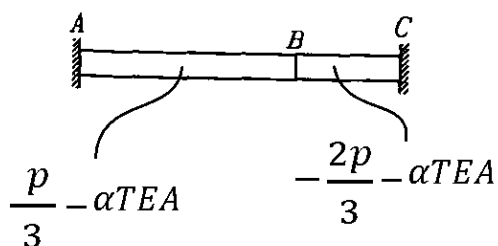
تحت حرارت:

هر دو قسمت تحت فشار $\alpha TE A$ خواهند بود.

$$\alpha TL = \frac{RL}{EA} \rightarrow R = \alpha TE A$$



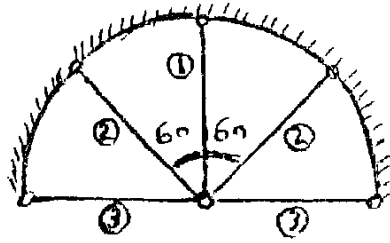
اگر حرارت و نیروی P باهم اثر کنند:



در نیمه چپ برای اینکه کشش نداشته باشیم:

$$\frac{2P}{3} - \alpha TL < 0 \rightarrow \frac{2P}{3\alpha L} < T$$

۴۳- تمام میله‌ها مشابه هستند (α, E, A, ℓ) چنانچه دمای میله‌ای (۱) و (۲) را به اندازه ΔT افزایش دهیم نیروی میله‌ها کدام است؟



$$(کششی) \quad F_1 = \frac{1}{3} \alpha \Delta T E A$$

$$(فشاری) \quad F_2 = \frac{1}{3} \alpha \Delta T E A \quad (1)$$

$$F_3 = 0$$

$$(فشاری) \quad F_1 = F_2 = F_3 = \frac{1}{3} \alpha \Delta T E A \quad (1)$$

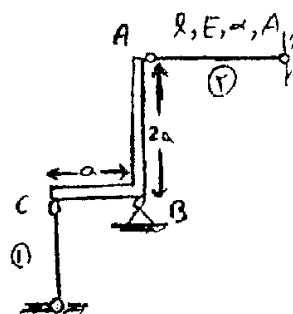
$$F_1 = F_2 = F_3 = 0 \quad (2)$$

$$(کششی) \quad F_1 = \alpha \Delta T E A$$

$$(فشاری) \quad F_2 = \alpha \Delta T E A \quad (1)$$

$$F_3 = 0$$

۴۱- میله‌های ۱ و ۲ مشابه و دارای طول یکسان می‌باشند چنانچه دمای میله (۱) را به اندازه ΔT افزایش و دمای میله (۲) را به اندازه ΔT کاهش دهیم، مقدار نیروی ایجاد شده در این دو میله کدام است؟ (قطعه ABC صلب می‌باشد)



$$F_1 = \frac{4}{5} \alpha \Delta T E A \quad (2)$$

$$F_2 = \frac{2}{5} \alpha \Delta T E A$$

$$F_1 = \frac{2}{3} \alpha \Delta T E A \quad (1)$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \alpha \Delta T E A$$

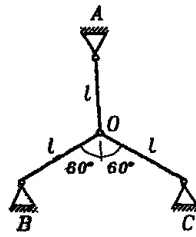
$$F_1 = \frac{2}{5} \alpha \Delta T E A \quad (2)$$

$$F_2 = \frac{1}{5} \alpha \Delta T E A$$

$$F_1 = \frac{3}{5} \alpha \Delta T E A \quad (1)$$

$$F_2 = \frac{6}{5} \alpha \Delta T E A$$

در خرابی زیر اگر دمای میله‌های OB و OC به میزان ΔT کاهش یابد و دمای میله OA به میزان $2\Delta T$ افزایش یابد چه نیرویی در میله OA بوجود می‌آید؟ (ضریب انبساط حرارتی اعضا α می‌باشد و $AE = const$)



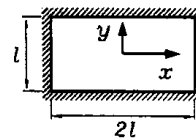
$$AE\alpha\Delta T \quad (1)$$

$$\frac{4}{3}AE\alpha\Delta T \quad (2)$$

$$2AE\alpha\Delta T \quad (3)$$

$$\bullet (4) \checkmark$$

در صفحه زیر که توسط تکیه‌گاه‌های صلب نگه داشته شده است، اگر دما به میزان ΔT کاهش یابد تنش کششی ایجاد شده چقدر است؟



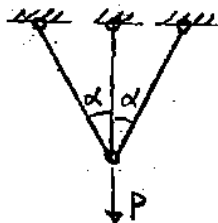
$$\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \quad (2) \checkmark$$

$$E\alpha\Delta T \quad (1)$$

$$\frac{E\alpha\Delta T}{1+\nu} \quad (3)$$

$$(1+\nu)E\alpha\Delta T \quad (4)$$

سه میله با سطح مقطع و جنس یکسان مطابق شکل روبرو زیر اثر نیروی P قرار گرفته‌اند. برای آنکه نیروی هر سه میله برابر شود باید:

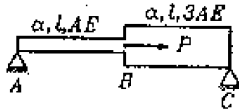


(۱) حرارت سازه را کاهش داد.

(۲) حرارت سازه را افزایش داد.

(۳) نیروها از ابتدا برابری و نیاز به تغییر درجه حرارت نیست.

(۴) با تغییر درجه حرارت امکان ندارد نیروی هر سه میله مساوی شود. \bullet



۱۳- در میله زیر برای آنکه تنش در میله AB صفر شود دمای میله چقدر باید افزایش یابد؟

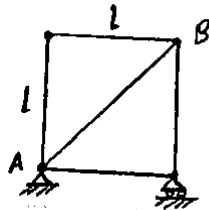
$$\frac{P}{2AE\alpha} \quad (۱)$$

$$\frac{P}{3AE\alpha} \quad (۲)$$

$$\frac{P}{4AE\alpha} \quad (۳)$$

$$\frac{P}{6AE\alpha} \quad (۴)$$

گزینه ۱



۸۸- اگر تمام اعضای خرابی روبرو به اندازه ΔT گرم شوند نیروی عضو AB چقدر خواهد بود؟
 سطح مقطع همه اعضا A و ضریب انبساط حرارتی α است.

$$EA\alpha\Delta T \quad (۱)$$

$$\sqrt{2} EA\alpha\Delta T \quad (۲)$$

$$0 \quad (۳)$$

$$\alpha l \sqrt{2} \Delta T \quad (۴)$$

۶۰- مطابق شکل دو میله ۱ و ۲ بدون اتصال بهم و به جایی توسط نیروی P وارد بر صفحه صلب به دیوار تکیه داده شده اند. با کاهش دمای سیستم به اندازه T، میله ۱ و ۲

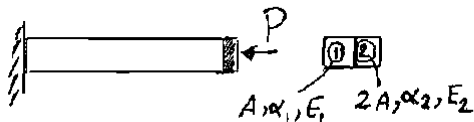
افزایش دمای آن به اندازه ۳T رها خواهد شد. $\frac{E_1}{E_2}$ چقدر است؟ صفحه صلب همواره همودبر محور طولی میله ها باقی می ماند.

$$۳ \quad (۴)$$

$$\frac{۳}{۲} \quad (۳)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{۱}{۳} \quad (۱)$$



مسئله ضریب حرارتی میله ۱ بیشتر است:

با سرد شدن سیستم، میله ۱ بیشتر از میله ۲ کوتاه می شود و بنابراین میله ۲ که طول بیشتری دارد باید نیروی P را تحمل کند (۱ آزاد میشود)

با گرم شدن سیستم، میله ۱ بیشتر بلند می شود و بنابراین میله ۱ که طول بیشتری دارد باید نیروی P را تحمل کند (۲ آزاد میشود)

وقتی سیستم سرد می شود:

$$\Delta L_1 = -\alpha_1 TL \quad \text{کاهش طول میله ۱ برابر است با:}$$

$$\Delta L_2 = -\alpha_2 TL - \frac{PL}{E_2(2A)} \quad \text{کاهش طول میله ۲ برابر است با:}$$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow -\alpha_1 TL = -\alpha_2 TL - \frac{PL}{E_2(2A)} \rightarrow \left[\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{P}{2E_2 AT} \right]$$

وقتی سیستم گرم می شود:

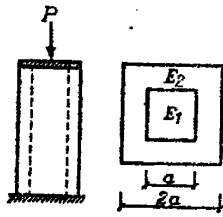
$$\Delta L_1 = \alpha_1 (3T)L - \frac{PL}{E_1(A)} \quad \text{افزایش طول میله ۱ برابر است با:}$$

$$\Delta L_2 = \alpha_2 (3T)L \quad \text{افزایش طول میله ۲ برابر است با:}$$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow 3\alpha_1 TL - \frac{PL}{E_1(A)} = 3\alpha_2 TL \rightarrow \left[\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{P}{3E_1 AT} \right]$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{2}{3}$$

۱-۶ اگر دمای ستون مربعی زیر به میزان T افزایش یابد نیروی فشاری P بصورت مساوی توسط مقاطع اول و دوم تحمل می‌شود. دمای ستون چگونه تغییر می‌کند تا تمام نیروی فشاری P را مقطع اول تحمل کند؟ ($E_1=4E_2$)



- (۱) به میزان $6T$ کاهش یابد
- (۲) به میزان $6T$ افزایش یابد.
- (۳) به میزان $8T$ کاهش یابد.
- (۴) به میزان $8T$ افزایش یابد.

در حالت اول:

$$\Delta L_2 = \alpha_2 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_2(3a^2)} \quad \text{افزایش طول میله ۲}$$

$$\Delta L_1 = \alpha_1 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_1(a^2)} \quad \text{افزایش طول میله ۱}$$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \alpha_1 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_1(a^2)} = \alpha_2 TL - \frac{\frac{P}{2}L}{E_2(3a^2)} \rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P}{Ta^2} \left(\frac{1}{6E_1} \right) \right]$$

در حالت دوم:

$$\Delta L_2 = \alpha_2 T' L \quad \text{تغییر طول میله ۲ برابر است با:}$$

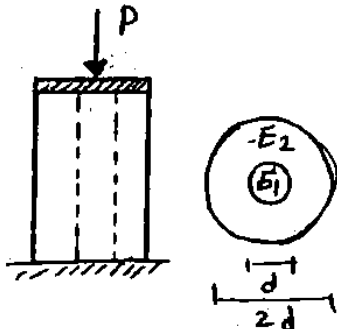
$$\Delta L_1 = \alpha_1 T' L - \frac{PL}{E_1(a^2)} \quad \text{تغییر طول میله ۱ برابر است با:}$$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \alpha_1 T' L - \frac{PL}{E_1(a^2)} = \alpha_2 T' L \rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{-P}{E_1 T' a^2} \right] \rightarrow T' = -6T$$

تمرین: آزاد ۸۵

۷۲- اگر دمای ستون زیر به میزان T افزایش یابد قسمت داخلی مقطع ۳۰ درصد نیروی فشاری P را تحمل می‌کند و اگر به میزان $3T$ کاهش یابد قسمت خارجی مقطع ۳۰ درصد

نیروی فشاری P را تحمل می‌کند. نسبت $\frac{E_1}{E_2}$ چقدر است؟



- | | | | |
|---------|-------|-------|---------|
| ۱/۵ (۱) | ۳ (۲) | ۲ (۳) | ۴/۵ (۴) |
|---------|-------|-------|---------|

در حالت اول:

$$\Delta L_2 = \alpha_2 TL - \frac{0.7PL}{E_2(3A_1)} \quad \text{تغییر طول میله ۲}$$

$$\Delta L_1 = \alpha_1 TL - \frac{0.3PL}{E_1 A_1} \quad \text{تغییر طول میله ۱}$$

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \alpha_2 TL - \frac{0.7PL}{E_2(3A_1)} = \alpha_1 TL - \frac{0.3PL}{E_1 A_1} \rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P}{TA_1} \left(\frac{0.7}{3E_2} - \frac{0.3}{E_1} \right) \right]$$

در حالت دوم:

$$\Delta L_2 = -\alpha_2(3T)L - \frac{0.3PL}{E_2(3A_1)} \quad \text{تغییر طول میله ۲}$$

$$\Delta L_1 = -\alpha_1(3T)L - \frac{0.7PL}{E_1 A_1} \quad \text{تغییر طول میله ۱}$$

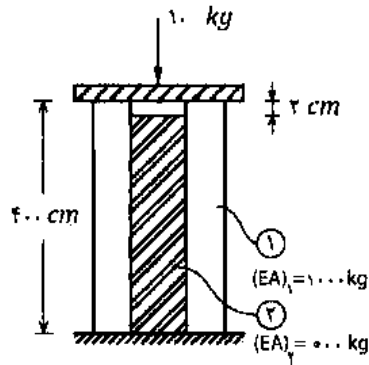
$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \left[\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P}{TA_1} \left(\frac{0.7}{3E_1} - \frac{0.1}{3E_2} \right) \right]$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \frac{0.7}{3E_2} - \frac{0.3}{E_1} = \frac{0.7}{3E_1} - \frac{0.1}{3E_2} \rightarrow \frac{1.6}{3E_1} = \frac{0.8}{3E_2} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 2$$

سراسری ۹۴

۵۳- در شکل زیر غلاف لوله‌ای (۱) هسته (۲) را در بر گرفته است. چنانچه هسته ۲ سانتی‌متر نسبت به غلاف

کوتاه ساخته شده باشد، نیروی وارد بر کلاهک صلب به چه نسبتی بین آن‌ها توزیع می‌شود؟ ($\frac{P_2}{P_1} = ?$)



- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{5}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{2}$

تا وقتی که استوانه بیرونی به اندازه 2cm فشرده نشود، کل بار به استوانه بیرونی اثر خواهد کرد. ابتدا باید بیابیم که تحت اثر چه باری استوانه بیرونی به اندازه 2cm فشرده خواهد شد:

$$2 \text{ cm} = \frac{PL}{EA_1} \rightarrow 2 \text{ cm} = \frac{P \times 400}{1000} \rightarrow P = 5 \text{ kg}$$

با وارد شدن 5kg استوانه بیرونی به اندازه 2cm فشرده شده و با هسته داخلی هم سطح می‌شود. 5kg بعدی هم به غلاف اثر می‌کند و هم به هسته. سهم غلاف از این 5kg برابر است با:

$$P_1 = 5 \text{ kg} \times \frac{EA_1}{EA_1 + EA_2} = 5 \times \frac{1000}{1500} = \frac{10}{3} \text{ kg}$$

بنابراین مجموع بار وارد بر غلاف برابر است با:

$$P_1 = 5 \text{ kg} + \frac{10}{3} \text{ kg} = \frac{25}{3} \text{ kg}$$

مقدار بار وارد بر هسته برابر خواهد بود با:

$$P_2 = P - P_1 = 10 \text{ kg} - \frac{25}{3} \text{ kg} = \frac{5}{3} \text{ kg}$$

$$\rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{5}$$

سراسری ۹۳ - دکتری

۱- دو استوانه توخالی به وسیله دوفک (صفحات صلب) در یک جک تحت اثر نیروی

فشاری ۱۰۰ کیلو نیوتن قرار می‌گیرند. اگر ارتفاع استوانه بیرونی ۱ سانتی‌متر از

ارتفاع استوانه داخلی بیشتر باشد، نیروی وارد بر استوانه داخلی و استوانه خارجی

به ترتیب از راست به چپ بر حسب kN چقدر می‌باشند؟

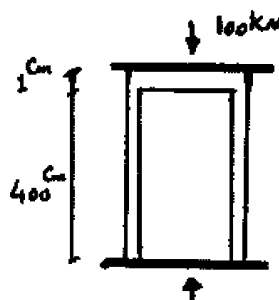
(سطح مقطع هر کدام از استوانه‌ها 1 cm^2 و $E = 2 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$)

(۱) ۱۰۰، ۰

(۲) ۷۵، ۲۵

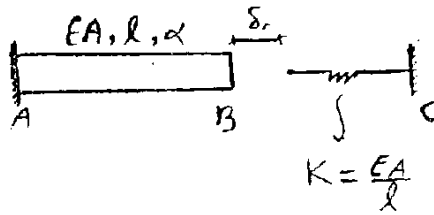
(۳) ۵۰، ۵۰

(۴) ۲۵، ۷۵



۴۵- انتهای B از میله AB به اندازه δ_0 از فنر فاصله دارد. دمای میله چقدر افزایش یابد تا فنر به اندازه $2\delta_0$

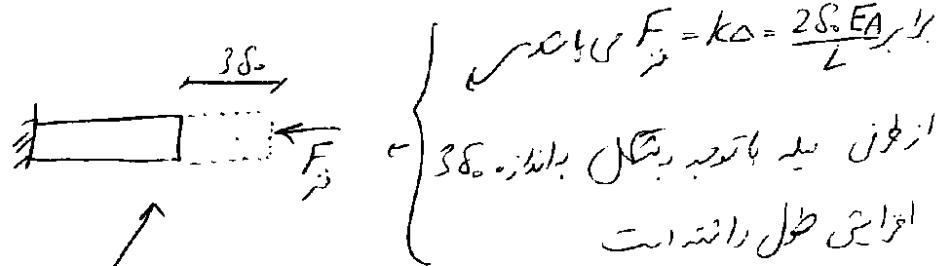
فشرده شود؟ (سختی فنر $K = \frac{EA}{l}$ می باشد)



$$\frac{10\delta_0}{\alpha l} \quad (۲) \qquad \frac{5\delta_0}{\alpha l} \quad (۱)$$

$$\frac{8\delta_0}{\alpha l} \quad (۴) \qquad \frac{4\delta_0}{\alpha l} \quad (۳)$$

۴۵) فنر به اندازه $2\delta_0$ فشرده شد است بنابراین نیروی آن فشاری و

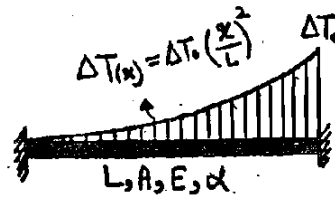


$$\Delta = 3\delta_0 \Rightarrow \alpha \Delta T L - F \times \frac{L}{EA} = 3\delta_0$$

$$\Rightarrow \alpha \Delta T L - \frac{2\delta_0 EA \times L}{EA} = 3\delta_0 \Rightarrow \alpha \Delta T L = 5\delta_0 \rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{5\delta_0}{\alpha L}}$$

سراسری ۸۵

۵۶- میله‌ای را که بین دو تکیه گاه ثابت قرار دارد مطابق شکل بطور یکنواخت حرارت داده ایم، مقدار تنش عمودی در میله برابر



$$E\alpha\Delta T_0 \quad (۱)$$

$$\frac{E\alpha\Delta T_0}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{E\alpha\Delta T_0}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{E\alpha\Delta T_0}{4} \quad (۴)$$

در اثر حرارت میله منبسط می شود ولی تکیه گاهها با اعمال نیروی فشاری مانع از افزایش طول آن می شوند. اگر عکس العمل تکیه گاه سمت چپ را برابر R در نظر بگیریم:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{المان}} &= -R \\ \Delta T_{\text{المان}} &= \Delta T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ \delta_{\text{المان}} &= \frac{(P_{\text{المان}}) dx}{EA} + \alpha (\Delta T_{\text{المان}}) dx = -\frac{R dx}{EA} + \alpha \Delta T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{aligned} \right\}$$

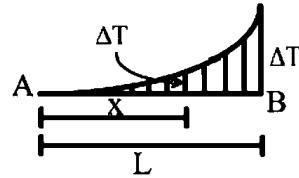
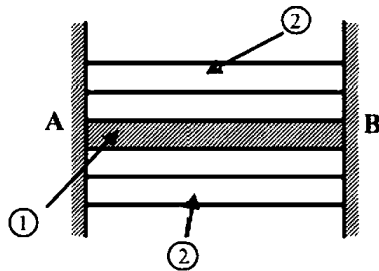
تغییر مکان انتهای سمت چپ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می دهیم:

$$\Delta = \int -\frac{R dx}{EA} + \alpha \Delta T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \int -\frac{R}{EA} + \alpha \Delta T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = -\frac{RL}{EA} + \frac{\alpha \Delta T_0 L}{3} = 0 \rightarrow \sigma = \frac{R}{A} = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$$

دکتری ۹۴

۶- مقطع مرکبی شامل هسته ۱ و پوسته ۲ به طول L بین دو تکیه‌گاه صلب قرار گرفته و به صورت غیر یکنواخت تحت گرادیان حرارتی ΔT قرار می‌گیرد به طوری که در فاصله x از انتهای A افزایش حرارت با رابطه $\Delta T = \Delta T_1 \frac{x^2}{L^2}$ بیان می‌شود. چنانچه روابط زیر برای مشخصات پایه دو جزء فرض شود نسبت تنش

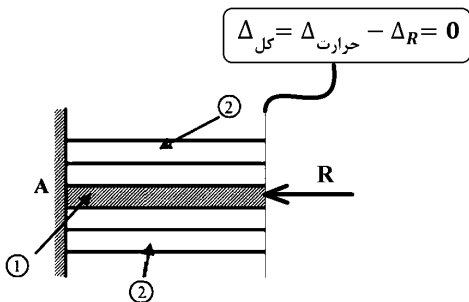
$$E_2 = E_1, A_2 = \frac{1}{4} A_1, \alpha_2 = 2\alpha_1 \text{ کدام است؟ } \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$



- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) ۲

گزینه ۲

تغییر طول هر دو میله باید صفر باشد.

فرض کنید نیروی وارد بر هسته و R_2 نیروی وارد بر پوسته باشد.

در میله ۱ (هسته) داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{حرارت-هسته}} &= \int_0^L \alpha_1 T \frac{x^2}{L^2} dx = \frac{\alpha_1 T L}{3} \\ \Delta_{R\text{-هسته}} &= \frac{R_1 L}{E_1 A_1} \end{aligned} \right\} \Delta_{\text{کل}} = \Delta_{\text{حرارت-هسته}} - \Delta_{R\text{-هسته}} = \left(\frac{\alpha_1 T L}{3} \right) - \left(\frac{R_1 L}{E_1 A_1} \right) = 0$$

$$\rightarrow R_1 = \frac{\alpha_1 T E_1 A_1}{3}$$

به همین ترتیب در میله ۲ (پوسته) نیز داریم:

$$R_2 = \frac{\alpha_2 T E_2 A_2}{3}$$

نسبت تنشها برابر است با:

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{R_1}{A_1} = \frac{\alpha_1 T E_1}{3} \\ \sigma_2 = \frac{R_2}{A_2} = \frac{\alpha_2 T E_2}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\alpha_1 E_1}{\alpha_2 E_2} = \frac{1}{2}$$

تمرین: آزاد ۹۳

۵۹- چنانچه میله ۱۰۰ سانتی‌متری ۳۰ درجه گرم شود، تنش ایجاد شده در آن چقدر است؟

$$\alpha = 17 \times 10^{-6}$$

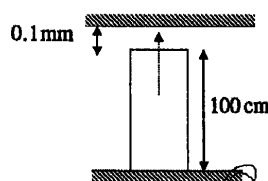
$$E = 110000$$

$$45.1 \text{ kg/cm}^2 \text{ (۱)}$$

$$4.51 \text{ kg/cm}^2 \text{ (۲)}$$

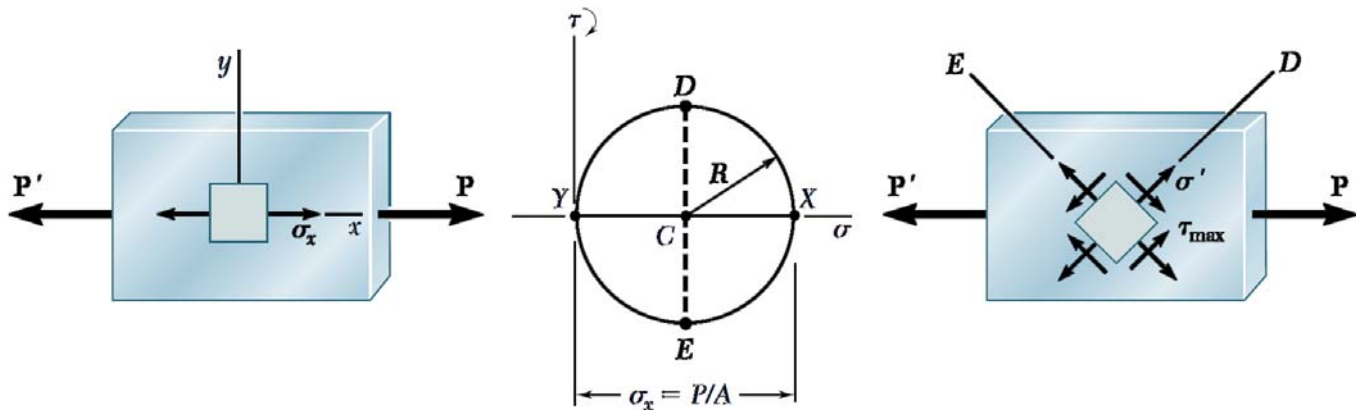
$$66.2 \text{ kg/cm}^2 \text{ (۳)}$$

$$6.62 \text{ kg/cm}^2 \text{ (۴)}$$



۷- دایره مورتنش (2D)

المان تنش چیست؟

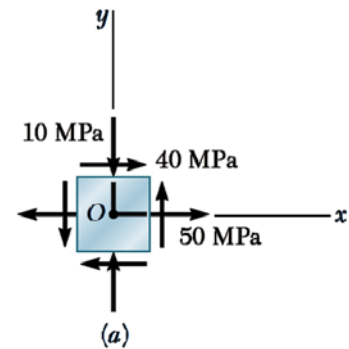
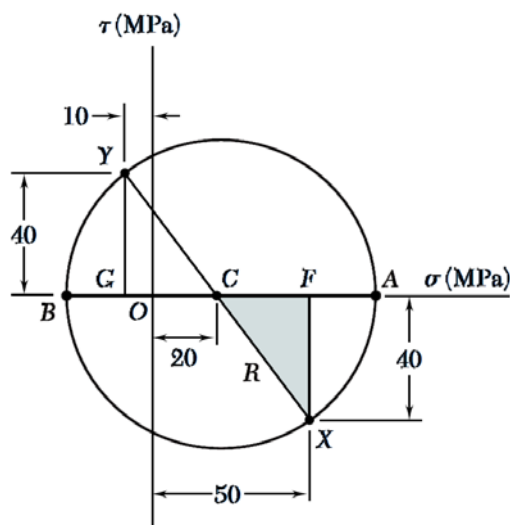


τ_{xy} , τ_{yx} چه فرقی دارند و علامتشان چگونه تعیین می شود؟

- تنش برشی اگر ساعت گرد باشد مثبت خواهد بود.

اگر المان مربعی شکل سمت راست را در نظر بگیرید، چهار صفحه داریم. این صفحات را با محور نرمال آنها اسم گذاری می کنیم. برای مثال در شکل سمت راست از این چهار صفحه دوتای آنها بر محور X عمود است. این دو صفحه را که عمود بر محور X ها می باشد صفحه X می نامیم. در این دو صفحه تنش محوری کششی برابر با 50MPa می باشد (شکل سمت راست). همینطور در این صفحه تنش برشی برابر با 40MPa (نسبت به مرکز المان) و پادساعت گرد می باشد.

بنابراین هر صفحه از المان در فضای دو بعدی دارای دو تنش خواهد بود: ۱- تنش محوری (کششی مثبت) ۲- تنش برشی (ساعت گرد مثبت).



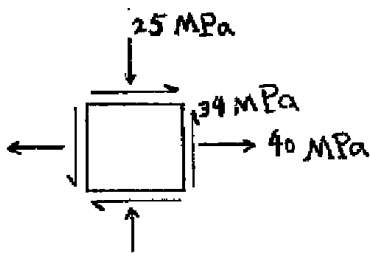
برای رسم دایره مور به شرح زیر عمل می کنیم:

نقاط X و Y را در شکل سمت چپ در بالا در نظر بگیرید. مختصات نقطه X برابر (50, -40) می باشد که همان تنش محوری و برشی در المان مربعی برای صفحه X می باشد. از طرفی مختصات نقطه Y در دایره برابر (-10, +40) می باشد که مربوط به تنش محوری و برشی در المان مربعی در صفحه Y می باشد.

مرکز دایره مور؟

سراسری ۹۲- دکتری

۲- اگر مختصات طولی مرکز دایره مور، متناظر با وضعیت تنش نشان داده شده π و شعاع دایره R باشد، نسبت $\frac{R}{x}$ چقدر است؟



۱/۰۷۱ (۱)

۴/۶۴۲ (۲)

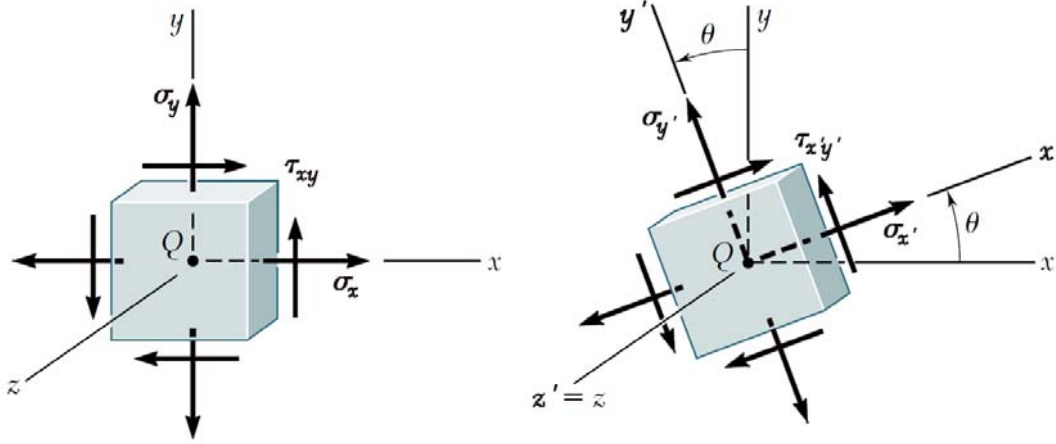
۱/۶۷۸ (۳)

۶/۲۷۱ (۴)

زوایا در دایره مور؟

-زویه ها در دایره مور دو برابر هستند (مثلثاتی مثبت)

تنش های اصلی؟



$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_{x'} \times \sigma_{y'} - \tau_{x'y'}^2 = \sigma_x \times \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

مثال

اگر در نقطه‌ای از یک سازه تحت اثر بارگذاری مؤلفه‌های تنش بصورت $\sigma_x = 2\sigma_y = 20$ و $\tau_{xy} = -30$ باشد، در این نقطه مجموع تنشهای اصلی چقدر است؟

۱۰ (۲)

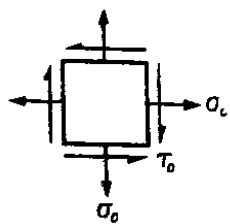
۴ (۱)

۳۰ (۴) ✓

۲۰ (۳)

مثال

۱۲۹- در المان تنش زیر مقادیر تنشهای اصلی چقدر است؟



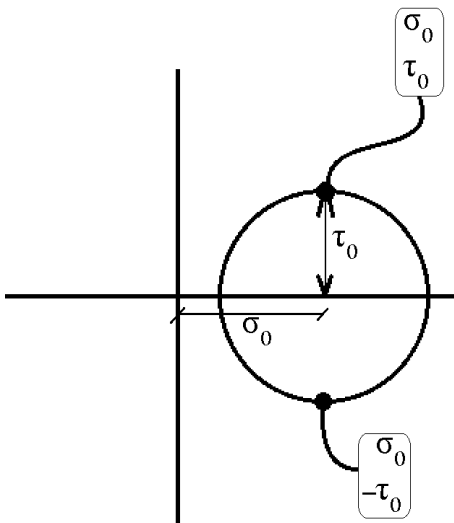
$\sigma_c - \tau_c$ و $\sigma_c + \tau_c$ (۲) ✓

σ_c و σ_c (۴)

$\sigma_c - \frac{\tau_c}{2}$ و $\sigma_c + \frac{\tau_c}{2}$ (۱)

τ_c و $2\sigma_c - \tau_c$ (۳)

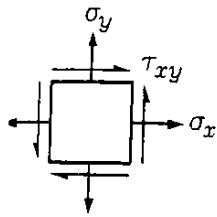
در صفحه مربوط به تنش به تنشهای اصلی تنش برشی صفر است.



$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \tau_0$$

$$\sigma_{min} = \sigma_0 - \tau_0$$

در یک المان تنش دو بعدی مانند شکل زیر حاصل $\sigma_x + \sigma_y$



چقدر خواهد شد؟

(۲) σ_{min}
 (۴) $\sigma_{max} - \sigma_{min}$

(۱) σ_{max}
 (۳) $\sigma_{max} + \sigma_{min}$ ✓

در تست قبل حاصل $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$ چقدر خواهد شد؟

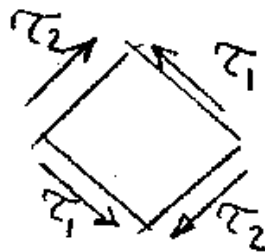
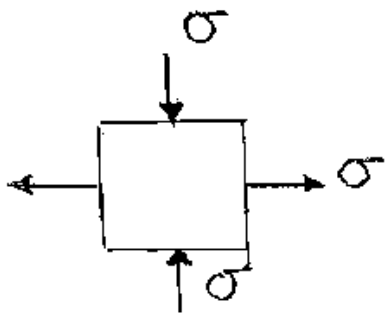
(۲) $\sigma_{max}^2 + \sigma_{min}^2$

(۱) ✓ $\sigma_{max} \times \sigma_{min}$

(۴) $(\sigma_{max} - \sigma_{min})^2$

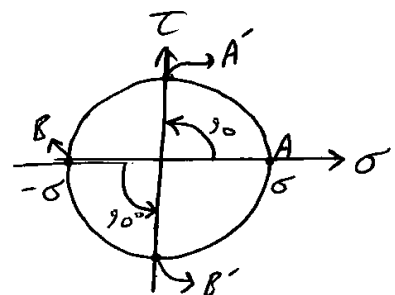
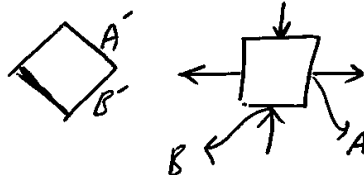
(۳) $\sigma_{max}^2 - \sigma_{min}^2$

۵۰- دو شکل روبرو تنش‌ها را در یک نقطه نشان می‌دهند اضلاع دو المان ۴۵ درجه نسبت بهم زاویه دارند. در حقیقت دو المان معادل هستند بنابراین:



- (۱) $\tau_1 = \tau_2 = 0$
- (۲) $\tau_1 = \tau_2 = \sigma$
- (۳) $\tau_1 = \tau_2 = 2\sigma$
- (۴) $\tau_1 = \tau_2 = -\sigma$

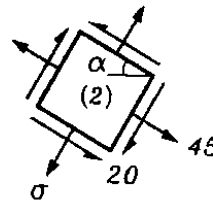
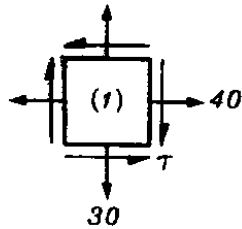
تنش برسی در A' با توجه به الیه برابر $\sigma + \sigma$ است



$\Rightarrow \tau = -\sigma$

در شکل زیر اگر المان اول را به میزان α در جهت ساعتگرد بچرخانیم

دوم حاصل می شود. مقادیر σ و τ بترتیب کدامند؟



(۱) $\sigma = 20$ و $\tau = 26,5$

(۲) $\sigma = 25$ و $\tau = 21,8$ ✓

(۳) $\sigma = 30$ و $\tau = 15,8$

(۴) بدون اینکه زاویه α مشخص باشد نمی توان مقادیر σ و τ را محاسبه کرد.

$$40 + 30 = 45 + \sigma \rightarrow \sigma = 25$$

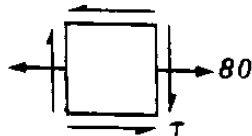
$$40 \times 30 - \tau^2 = 45 \times 25 - 20^2 \Rightarrow \tau = 21,8$$



مثال

۱۲۸- تنشهای وارده در یک نقطه از سازه ای در المان تنش زیر نشان داده شده است. اگر

اگر مقدار تنش اصلی کششی برابر $140 MPa$ باشد، تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



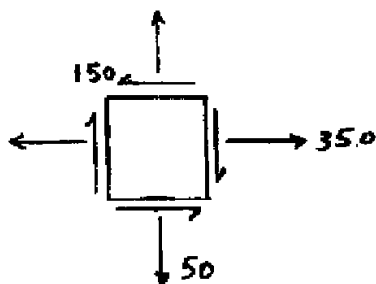
- (۱) $80 MPa$
- (۲) $100 MPa$ ✓
- (۳) $120 MPa$
- (۴) بستگی به مقدار τ دار

$$80 + 0 = 140 + \sigma_{min} \rightarrow \sigma_{min} = -60 MPa$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{140 - (-60)}{2} = 100 MPa$$

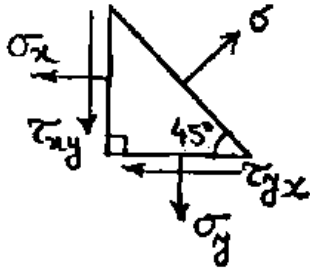
سراسری ۹۲- دکتری

۳- وضعیت تنش در یک نقطه از جسمی به صورت مقابل است (واحد تنش ها MPa). وضعیت اصلی تنش نسبت به وضعیت نشان داده شده با دوران درجه در جهت حاصل می شود.



- (۱) $22,5$ پاد ساعتگرد
- (۲) 45 - ساعتگرد
- (۳) 45 پاد ساعتگرد
- (۴) $67,5$ پاد ساعتگرد

۵۲- در نقطه‌ای از یک سازه تنش‌ها مطابق شکل روبرو است. $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ چقدر است؟

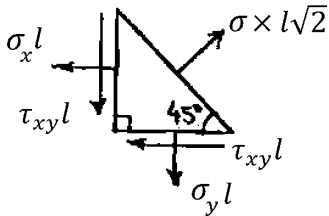


- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

هر مقداری امکان دارد.

گزینه ۱

شکل زیر "نیرو" های وارد بر سطوح را نشان میدهد (بعد عمود بر صفحه المان برابر واحد فرض شده است).



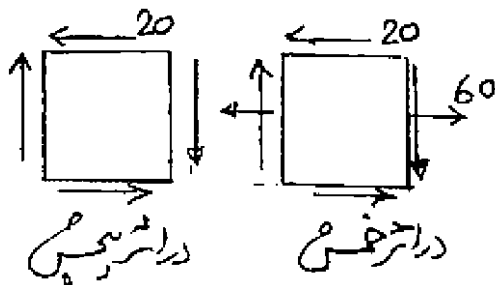
$$\sum F_x = 0 \rightarrow (\sigma l \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_x l - \tau_{xy} l = 0 \rightarrow \sigma - \sigma_x - \tau_{xy} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow (\sigma l \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma_y l - \tau_{xy} l = 0 \rightarrow \sigma - \sigma_y - \tau_{xy} = 0$$

با توجه به دو رابطه فوق مقادیر σ_x و σ_y با هم برابر خواهند بود.

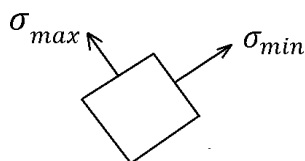
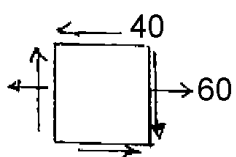
۵۹- در یک نقطه از سازه‌ای در اثر پیچش تنش برشی 20 MPa و در اثر خمش تنش برشی 20 MPa و تنش عمودی 60 MPa مطابق شکل موجود است.

بزرگترین تنش برشی و تنش‌های اصلی بر حسب MPa چقدر است؟



- ۱) 40 برشی و 60 کششی و 20 فشاری
۲) 40 برشی و 40 کششی و 40 فشاری
۳) 40 برشی و 20 کششی و فشاری
۴) 50 برشی و 80 کششی و 20 فشاری

اگر خمش و پیچش همزمان وارد شوند، المان به صورت خواهد بود.



$$\left. \begin{aligned} 60 + 0 &= \sigma_{max} + \sigma_{min} \\ 60 \times 0 - 40^2 &= \sigma_{max} \times \sigma_{min} \end{aligned} \right\} \sigma_{max} = 80 \quad \sigma_{min} = -20$$

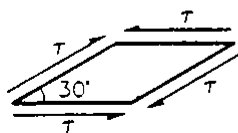
محاسبه تنش برشی ماکزیمم:

$$\tau = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2} = 50$$

۷- میله‌ای تحت تنش تک محوره کششی σ قرار دارد. در صفحه‌ای که تنش عمودی در آن $\frac{\sigma}{4}$ است، تنش برشی چقدر است؟

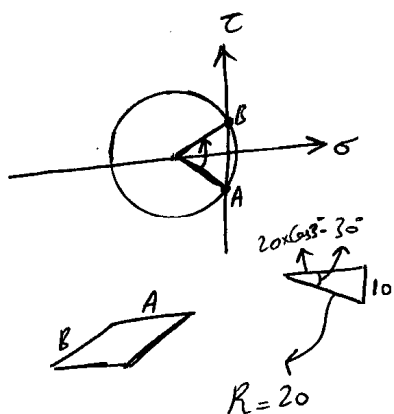
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}\sigma$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}\sigma$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma$

در یک نقطه از سازه‌ای، المانی مطابق شکل نشان داده شده‌است. روی صفحات نشان داده شده، تنش برشی مساوی 10 MPa و تنش عمودی صفر است. مقادیر تنشهای اصلی σ_1 و σ_2 برحسب MPa چقدر است؟ (در این نقطه تنش مسطح است)



- (۱) 10 و -10 (۲) 20 و 0

- (۳) $16,93$ و $10,65$ (۴) $10\sqrt{3} + 20$ و $10\sqrt{3} - 20$



$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= 20 - 20 \times \cos 30^\circ = 20 - 10\sqrt{3} \\ \sigma_{min} &= -20 - 20 \times \cos 30^\circ = -20 - 10\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{تنش مثبت است} \\ \text{بر رز نیز مثبت است} \end{array}$$

۵۴- در نقطه‌ای از یک جسم، مؤلفه‌های تنش بصورت $\sigma_x = 6$ ، $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 4$ و سایر مؤلفه‌ها برابر صفر می‌باشند. روی صفحه‌ای که از آن نقطه می‌گذرد و مؤلفه تنش برشی مقدار ماکزیمم را دارد مقدار مؤلفه تنش عمودی چقدر می‌باشد؟

- (۱) 0 (۲) 3 (۳) -2 (۴) 8

وقتی تنش برشی ماکزیمم است $\sigma = \sigma_n = \sigma_y$ این نقاط را داریم $\sigma = \sigma_n = \sigma_y$

$$\begin{cases} 6 + 0 = \sigma + \sigma \rightarrow \sigma = 3 \\ 6 \times 0 - 4^2 = \sigma^2 - \tau^2 \rightarrow \tau = \pm 5 \end{cases}$$

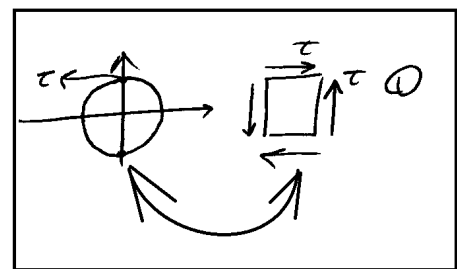
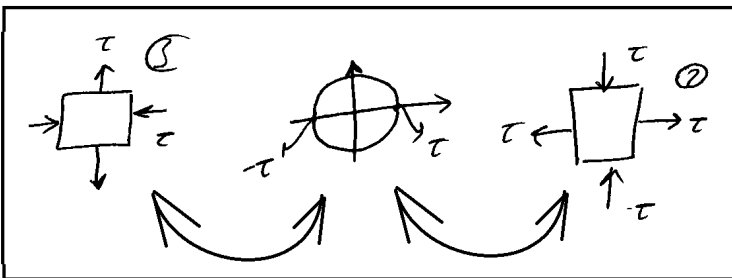
المان هایی که در آنها برش محض داریم؟

مثال

کدامیک از تانسورهای زیر می تواند مربوط به حالت برش محض باشد؟

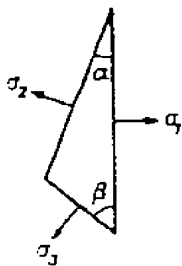
(۴) همه موارد ✓

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} -\tau & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix}$$



آزاد ۸۷

در المان زیر که تنشهای برشی روی صفحات نشان داده شده صفر است. کدام گزینه صحیح می باشد؟



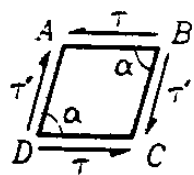
$$\sigma_1 = \sigma_2 \sin \alpha = \sigma_3 \sin \beta \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{\sin \alpha} = \frac{\sigma_3}{\sin \beta} \quad (1)$$

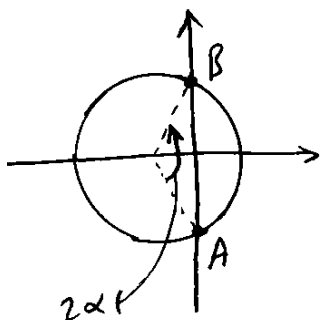
$$\frac{\sigma_1}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sigma_2}{\sin \alpha} = \frac{\sigma_3}{\sin \beta} \quad (2)$$

اگر به جای المان مربعی، المان لوزی مطابق شکل زیر در نظر گرفته شود، رابطه $\tau = \tau'$ به چه رابطه‌ای تغییر می‌کند؟



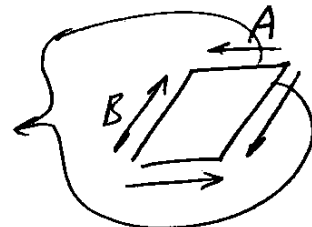
(۲) $\tau' = \tau \sin \alpha$
 رابطه تغییر نمی‌کند. (✓)

(۱) $\tau = \tau' \sin \alpha$
 (۳) $\tau' = \tau \sin^2 \alpha$

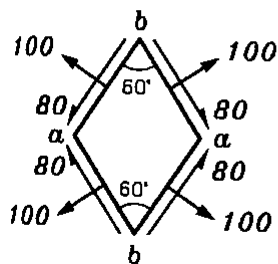


$\tau_A = \tau_B$

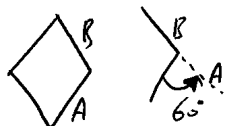
تنش محور هوراستیس :



۱۳۲- در المان تنش زیر مقادیر تنشهای اصلی چقدر است؟

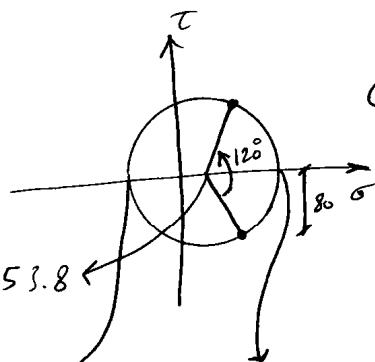


(۱) $53,8$ و $-38,6$
 (۲) 150 و -50
 (۳) $146,2$ و $-32,2$ (✓)
 (۴) $152,4$ و $-32,2$



$\sigma = 100 - 80 \cot(60) = 53.8$

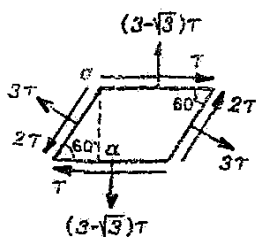
$\sigma_1 = \sigma - R = 53.8 - \frac{80}{\sin 60} = -38.57$



$\sigma_2 = \sigma + R = 53.8 + \frac{80}{\sin 60} = 146.17$

چون زوایای ۹۰ نیستند، مانند مثال قبل نمی‌توان از روابط استفاده کرد و باید از رابطه هوراستفاده کرد:

۱۱- در المان تنش زیر مقدار تنش' نرمال در صفحه قائم a-a چقدر است؟



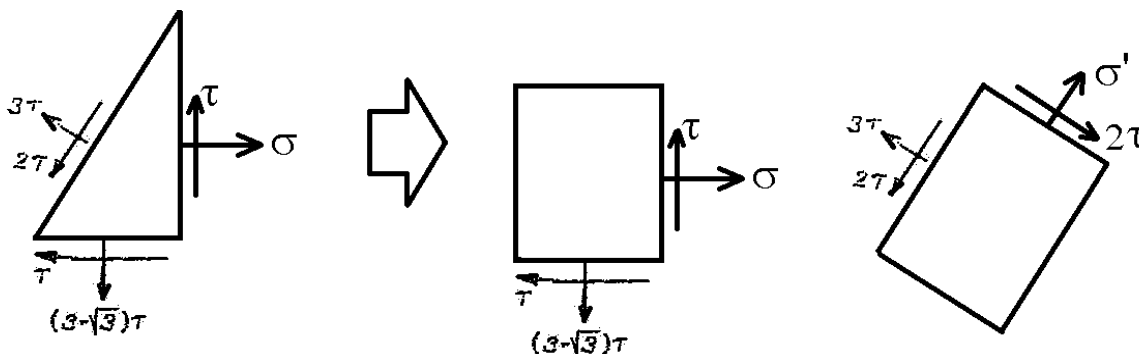
$(1 + \sqrt{3}) \tau$ (۲)

$(2 + \sqrt{3}) \tau$ (۱)

$(4 + \sqrt{3}) \tau$ (۱)

$(3 + \sqrt{3}) \tau$ (۳)

روش اول:



$$\sigma + (3 - \sqrt{3})\tau = 3\tau + \sigma' \rightarrow \sigma' = \sigma - \sqrt{3}\tau$$

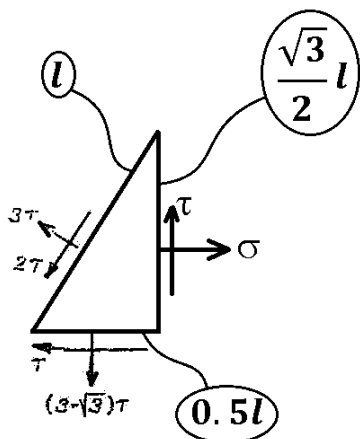
$$\sigma \times (3 - \sqrt{3})\tau - \tau^2 = 3\tau \times \sigma' - 4\tau^2$$

$$\sigma \times (3 - \sqrt{3})\tau - \tau^2 = 3\tau \times (\sigma - \sqrt{3}\tau) - 4\tau^2 \rightarrow \sigma \times (-\sqrt{3}\tau) = (-3\sqrt{3} - 3)\tau^2 \rightarrow \sigma = (3 + \sqrt{3})\tau$$

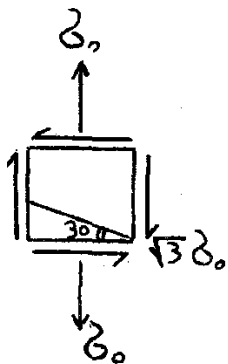
روش دوم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \sigma \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \right) - \tau \times (0.5l) - 3\tau \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (l) - 2\tau \times \frac{1}{2} \times (l) = 0$$

$$\rightarrow \sigma \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \tau \left(0.5 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \rightarrow \sigma = \tau(\sqrt{3} + 3)$$



۴۵- در المان نشان داده شده تنش عمودی در صفحه‌ای که با راستای افق زاویه ۳۰ درجه می‌سازد کدام است؟



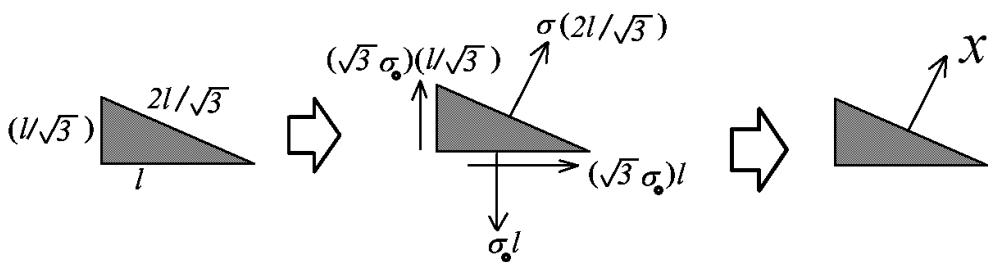
۱) کششی $\frac{3}{4} \sigma_0$

۲) فشاری $\frac{3}{4} \sigma_0$

۳) کششی $\frac{2}{5} \sigma_0$

۴) فشاری $\frac{2}{5} \sigma_0$

گزینه ۲

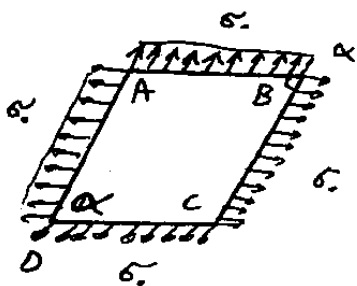


برآیند نیروها را در راستای X می‌نویسیم:

$$\sigma \left(\frac{2l}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{3} \sigma_0 \frac{l}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \sigma_0 (l) \times \frac{1}{2} - \sigma_0 l \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\sigma(2l) + \sigma_0 l \times \frac{3}{2} + \sigma_0 (l) \times \frac{3}{2} - \sigma_0 l \times \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \sigma = -\frac{3}{4} \sigma_0$$

۷۱- مطابق شکل زیر المان متوازی الاضلاع ABCD تحت اثر تنش کششی σ_0 می‌باشد. تنش برشی ماکزیمم در صفحه این المان چقدر است؟

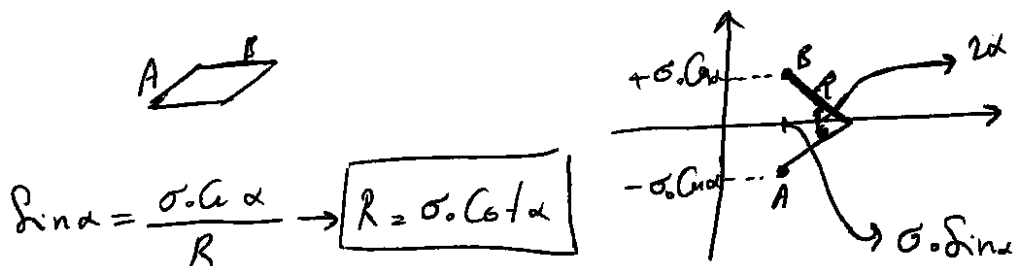
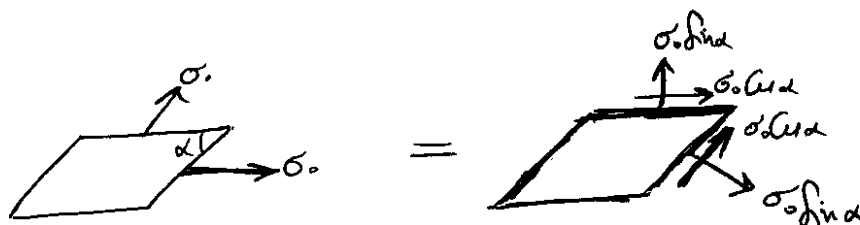


۱) $\sigma_0 \cos \alpha$

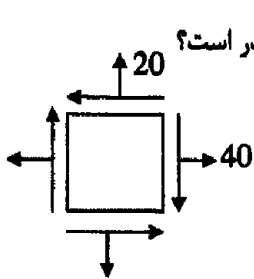
۲) $\sigma_0 \cos^2 \alpha$

۳) $\sigma_0 \cot^2 \alpha$

۴) $\sigma_0 \cot \alpha$

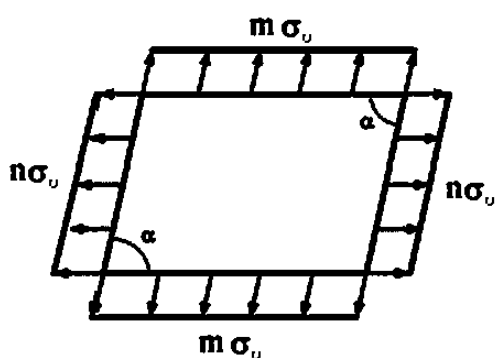


۵۰. در المان زیر در صورتی که $\delta_{\min} = \frac{1}{4} \delta_{\max}$ باشد، تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



۶۰kpa (۲) ۲۰kpa (۱)
۲۴kpa (۴) ۱۸kpa (۳)

۱۷- در المان زیر مجموع تنش‌های اصلی چقدر است؟

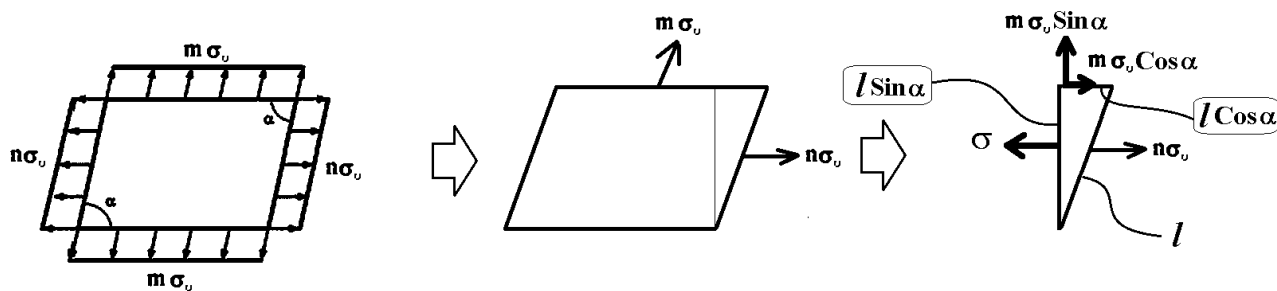


- (۱) $\frac{m+n}{\sin \alpha} \sigma_0$
(۲) $\frac{m+n}{\sin^2 \alpha} \sigma_0$
(۳) $(m+n) \sigma_0 \sin \alpha$
(۴) $(m+n) \sigma_0 \sin^2 \alpha$

گزینه ۱

برای یافتن مجموع تنشها، باید تنشهای وارد بر دو صفحه "عمود برهم" را داشته باشیم. در شکل زیر ابتدا باید مقدار σ را بیابیم. با نوشتن تعادل نیرویها می توان مقدار σ را بدست آورد:

$$\sigma \times l \sin \alpha = m \sigma_0 \cos \alpha \times l \cos \alpha + n \sigma_0 l \quad \rightarrow \quad \sigma = m \sigma_0 \times \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + n \sigma_0 \frac{1}{\sin \alpha}$$

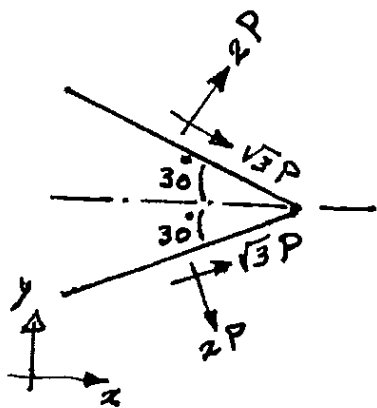


مجموع تنشها برابر جمع تنش محوری وارد بر دو سطح متعامد خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{جمع تنشهای اصلی} &= \sigma + m \sigma_0 \sin \alpha = m \sigma_0 \times \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{n \sigma_0}{\sin \alpha} + m \sigma_0 \sin \alpha = \\ &= m \sigma_0 \times \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + n \sigma_0 \frac{1}{\sin \alpha} + m \sigma_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{m \sigma_0 + n \sigma_0}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

سراسری ۹۲

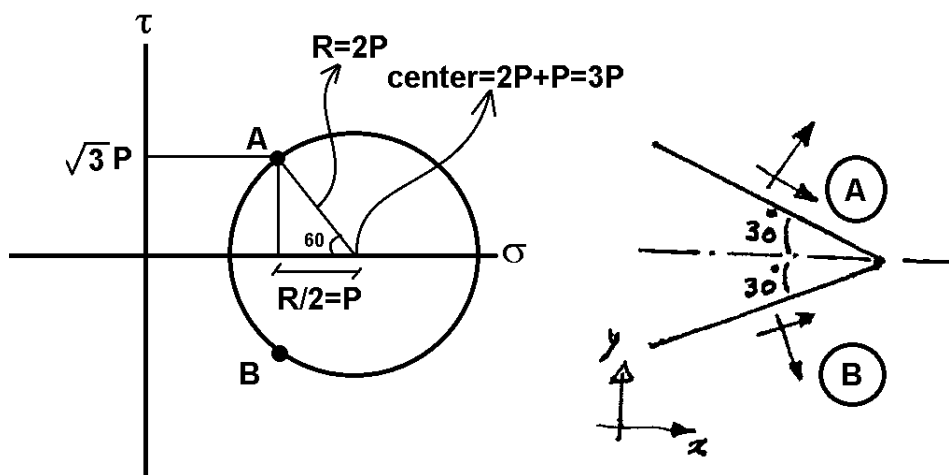
۵۲- تنش‌ها در یک نقطه از سازه بر روی دو صفحه مطابق شکل نشان داده شده است. مؤلفه‌های تنش بر روی صفحه عمودی، کدام است؟



- (۱) $\sigma_x = 5P, \tau_{xy} = -p$
- (۲) $\sigma_x = 5P, \tau_{xy} = 0$
- (۳) $\sigma_x = 5P, \tau_{xy} = p$
- (۴) $\sigma_x = 8P, \tau_{xy} = 0$

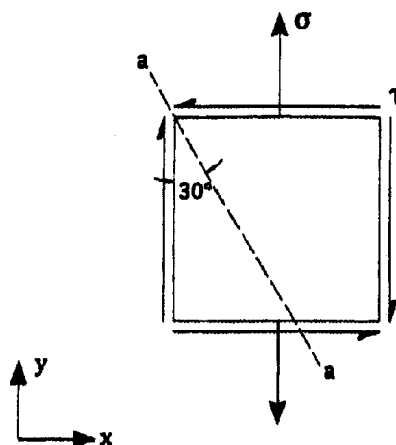
گزینه ۲.

اگر مطابق شکل دایره مور المان را رسم کنیم، مشاهده می شود که با چرخش 60° درجه از صفحه A (درجه در دایره مور) به صفحه قائم (تنش اصلی حداکثر در دایره مور) در شکل می رسمیم. بنابراین تنش برشی آن صفر و تنش محوری آن برابر $\sigma = \sigma_{center} + R = 3P + 2P = 5P$ می باشد.

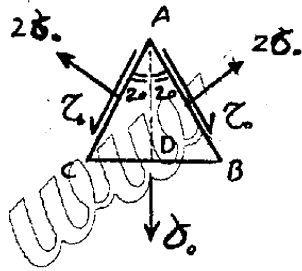


سراسری ۹۳

۵۲- مؤلفه‌های تنش در نقطه‌ای از سازه در صفحه xy مطابق شکل می‌باشد. چنانچه صفحه a-a صفحه‌ای با تنش‌های اصلی حداقل باشد، نسبت $\frac{\sigma}{\tau}$ چقدر است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$
- (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



۴۳- در المان نشان داده شده تنش برشی در راستای AD کدام است؟

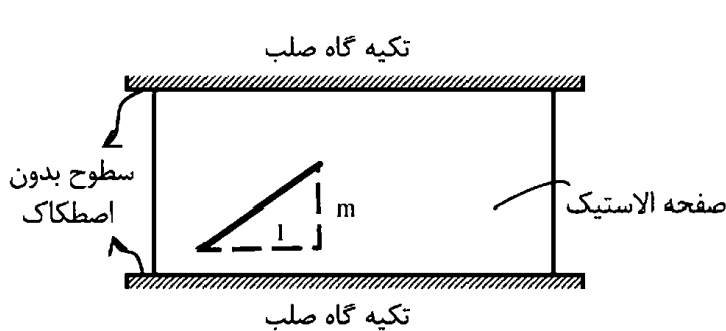
- (۱) σ_0
 (۲) $2\sigma_0$
 (۳) $4\sigma_0$
 (۴) صفر

گزینه ۴

در صفحه CB تنش برشی صفر است و بنابراین صفحه CB صفحه اصلی می باشد. صفحه AD نیز که عمود بر صفحه CB است، یک صفحه اصلی خواهد بود. (صفحات اصلی بر هم عمودند). بنابراین در صفحه AD نیز تنش برشی صفر است.

دکتری ۹۴

۷- صفحه نازکی از ماده‌ی الاستیک طبق شکل بین سطوح بدون اصطکاک دو تکیه‌گاه صلب قرار گرفته است. در دمای T_0 صفحه بدون تنش است و خطی به شیب m بر روی آن علامت زده می‌شود. کدام مورد به شیب خط پس از افزایش دمای ΔT در صفحه نزدیک‌تر است؟ (ضریب پواسون صفحه ν و $\alpha\Delta T \ll 1$)

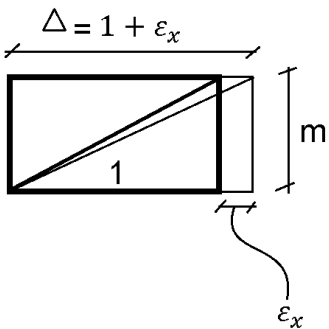


- (۱) $m[1 + \alpha\Delta T]$
 (۲) $m[1 - \alpha\Delta T]$
 (۳) $m[1 + (1 + \nu)\alpha\Delta T]$
 (۴) $m[1 - (1 + \nu)\alpha\Delta T]$

ابتدا باید عکس العمل های تکیه گاهی (در اینجا عکس العمل ها از جنس σ_y هستند) را بیابیم حرارت موجب انبساط می شود ولی تکیه گاه های قائم مانع از افزایش طول در راستای y می شوند:

$$\varepsilon_y = 0 \rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} + \alpha T = 0 \rightarrow \sigma_y = -\alpha T E$$

در راستای افقی تکیه گاهی نداریم و σ_x صفر است.

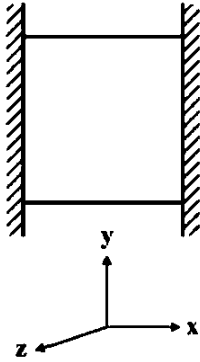


$$\varepsilon_x = +\alpha T - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \alpha T + \nu \frac{E\alpha T}{E} = \alpha T(1 + \nu) \rightarrow \Delta = 1 + \varepsilon_x = 1 + \alpha T(1 + \nu)$$

بنابراین شیب جدید برابر است با:

$$\frac{m}{\Delta} = \frac{m}{1 + \alpha T(1 + \nu)} = m(1 - \alpha T(1 + \nu))$$

۵- مکعبی به ضلع a درون محفظه‌ای قرار دارد و فقط می‌تواند در جهت قائم تغییر طول بدهد. اگر دمای این مکعب به اندازه ΔT افزایش داده شود، تغییر طول ضلع قائم مکعب (در جهت y) کدام است (α ضریب انبساط حرارتی، ν ضریب پواسون و E مدول ارتجاعی مکعب است)؟



$$\frac{\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T a \quad (1)$$

$$\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T a \quad (2)$$

$$\frac{1+2\nu}{1-\nu} \alpha \Delta T a \quad (3)$$

$$\frac{1-\nu}{2+\nu} \alpha \Delta T a \quad (4)$$

گزینه ۲

ابتدا باید عکس العمل‌های تکیه گاهی (در اینجا عکس العمل‌ها از جنس σ_x و σ_z هستند) را بیابیم حرارت موجب انبساط می‌شود ولی تکیه گاه‌های افقی مانع از افزایش طول در راستای x و z می‌شوند.

به علت تقارن افقی:

$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma$$

عکس العمل‌های افقی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha T = 0 \quad \xrightarrow{\sigma_x = \sigma_z = \sigma} \quad \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} + \alpha T = 0$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\alpha T E}{(1-\nu)}$$

پس از یافتن تنش‌های افقی حرکت در جهت قائم بدست می‌آید. دقت کنید که $\sigma_y = 0$ است (چون در راستای قائم تکیه گاه نداریم و باری هم وارد نشده):

$$\Delta y = \varepsilon_y a = \left(\frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha T \right) a = \left(0 + \nu \frac{\alpha T}{(1-\nu)} + \nu \frac{\alpha T}{(1-\nu)} + \alpha T \right) a$$

$$\Delta y = \alpha T a \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}$$

۴۶- بر روی سطح دیواری مقادیر کرنش در دو امتداد متعامد برابر $\varepsilon_x = 0.0006$ و $\varepsilon_y = -0.0012$ اندازه‌گیری شده است. با فرض رفتار الاستیک خطی و اینکه بر روی سطح دیوار مزبور بار خارجی وارد نمی‌شود ($\sigma_z = 0$)، مقدار کرنش در جهت عمود بر سطح دیوار چقدر است؟ ضریب پواسون برابر 0.25 و مدول ارتجاعی برابر 40 MPa در نظر گرفته شود.

$$0.0004 \quad (4)$$

$$0.0002 \quad (3)$$

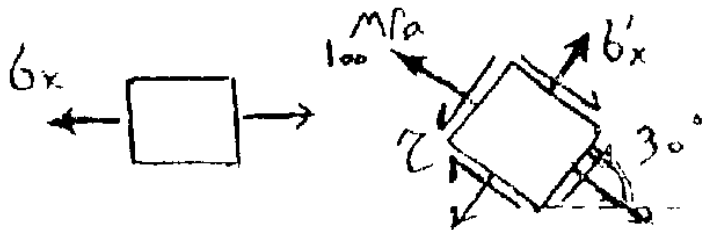
$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$-0.0004 \quad (1)$$

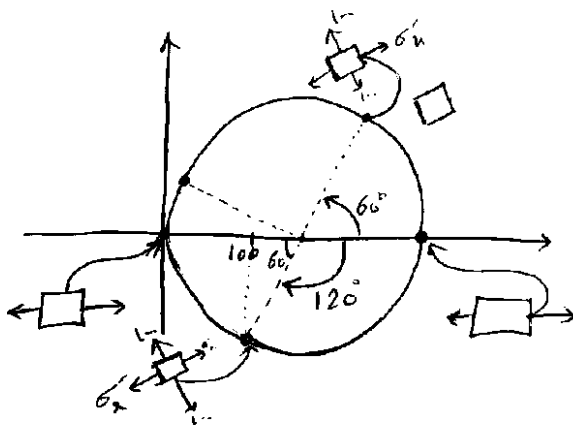
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = -0.0012 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-\nu} = \frac{-0.0006}{0.75} \\ \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = 0.0006 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_z = -\nu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right) = -0.25 \frac{-0.0006}{0.75} = 0.0002$$

۴۷- دو المان نشان داده شده وضعیت تنش‌ها را در یک نقطه از سازه بر اثر یک نوع بارگذاری نشان می‌دهند تنش برشی حداکثر در این نقاط کدام است؟



- 200 MPa (۱)
- 100 MPa (۲)
- 300 MPa (۳)
- 50 MPa (۴)



$$R - R \cos 60^\circ = 100$$

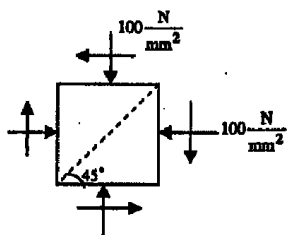
$$\rightarrow R(1 - \frac{1}{2}) = 100$$

$$\rightarrow R = 200$$

$$\rightarrow \tau_{max} = R = 200 \text{ MPa}$$

تمرین: آزاد ۹۳

۴۲- برای المان مربع شکل مقابل در تنش محوری و برش بر روی صفحه قطری ab برابر صفر است. تنش T_{xy} کدام است؟



- 50 $\frac{N}{mm^2}$ (۱)
- 100 $\frac{N}{mm^2}$ (۲)
- 125 $\frac{N}{mm^2}$ (۳)
- 150 $\frac{N}{mm^2}$ (۴)

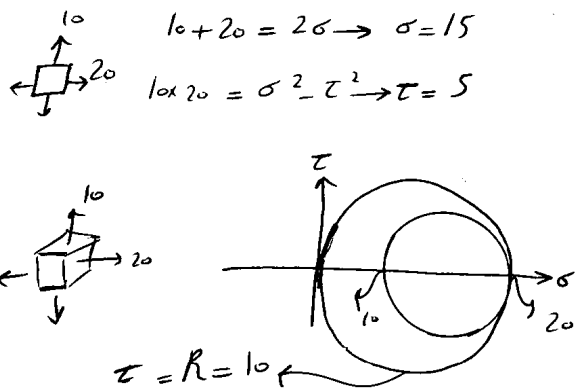
تمرین: آزاد ۹۳

۴۳- تانسور تنش المانی به صورت زیر است، تنش‌های اصلی و برش ماکزیمم کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

- $\tau_{Max} = 2.5, \delta_2 = -10 \text{ kpa}, \delta_1 = 15 \text{ kpa}$ (۱)
- $\tau_{Max} = 13 \text{ kpa}, \delta_2 = -10 \text{ kpa}, \delta_1 = 15 \text{ kpa}$ (۲)
- $\tau_{Max} = 13 \text{ kpa}, \delta_2 = -11 \text{ kpa}, \delta_1 = 15 \text{ kpa}$ (۳)
- $\tau_{Max} = 2, \delta_2 = -11 \text{ kpa}, \delta_1 = 15 \text{ kpa}$ (۴)

مثال

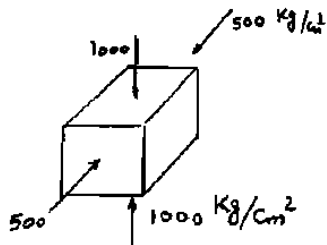


در المان زیر تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

	۱۰ (۲)	۵ (۱)
	۲۰ (۴)	۱۵ (۳)
	۱۰ (۲) ✓	۵ (۱)
	۲۰ (۴)	۱۵ (۳)

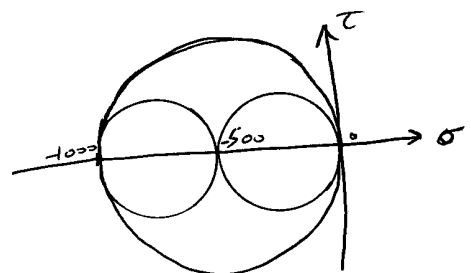
سراسری ۸۱

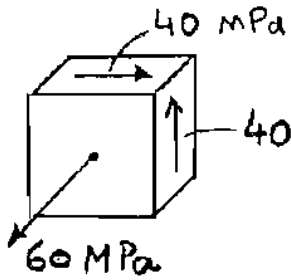
۴۳. به یک المان مکعبی شکل از یک جسم، تنشهای محوری دویعدی مطابق شکل اعمال شده است. حداکثر تنش برشی در این مکعب چند کیلوگرم بر سانتی متر مکعب می باشد؟



- ۲۵۰ (۱)
- ۵۰۰ (۲)
- ۷۵۰ (۳)
- ۱۰۰۰ (۴)

$$\tau = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{0 - (-1000)}{2} = 500$$

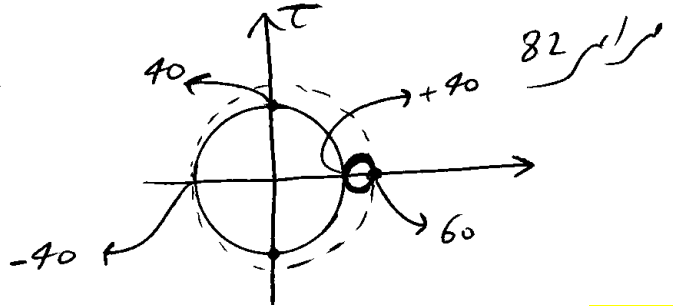




۳۹- در المان شکل روبرو تنش های اصلی بر حسب MPa چقدر می باشند؟

- (۱) ۸۰، صفر، -۲۰
- (۲) ۶۰، ۴۰، -۴۰
- (۳) ۶۰، ۴۰، ۴۰
- (۴) صفر، ۶۰، ۸۰

گزینه ۲



(آزاد ۸۳)

۲۲- ناسور تنش در نقطه ای از سازه بصورت $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 2\sigma \\ 0 & \sigma & 0 \\ 2\sigma & 0 & \sigma \end{bmatrix}$ می باشد. تنشهای اصلی در آن نقطه کدامند؟

۲σ, 2σ, -σ (۴)

σ, σ, σ (۳)

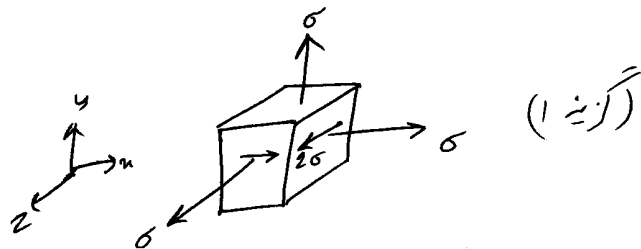
σ, 0, σ (۲)

3σ, σ, -σ (۱)

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3\sigma \\ \sigma_2 = -\sigma \\ \sigma_3 = \sigma \end{cases}$$

ریشه صفر ۲ ×

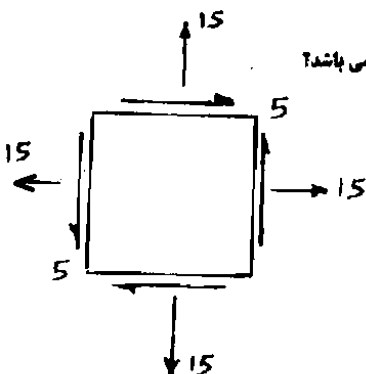
$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma \\ \sigma_1 \sigma_2 = \sigma^2 - 4\sigma^2 = -3\sigma^2 \end{cases}$$



(گزینه ۱)

تمرین: سراسری ۸۳

۵۶- وضعیت تنش در یک المان مطابق شکل روبرو می باشد. مقدار تنش برشی حداکثر مطلق در نقطه مورد نظر چه مقدار می باشد؟



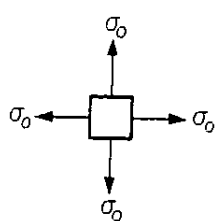
- (۱) ۰
- (۲) ۵
- (۳) ۱۵
- (۴) ۱۰

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 30 \\ \sigma_1 \sigma_2 &= 15^2 - 5^2 = 200 \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 20$$

تنش برشی حداکثر مطلق را خواسته است (برعکس)

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{20 - 0}{2} = 10$$

تمرین:



در المان زیر تنش برشی ماکزیمم در صفحه المان و تنش برشی ماکزیمم واقعی کدامند؟

(۲) σ_0 و 0

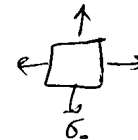
(۱) σ_0 و σ_0

(۴) $\frac{\sigma_0}{2}$ و $\frac{\sigma_0}{2}$

(۳) 0 و $\frac{\sigma_0}{2}$ ✓

در واقع $\tau_{max} = \frac{\sigma_0 - 0}{2} = \frac{\sigma_0}{2}$ ✓

در صفحه المان $\tau_{max} = \frac{\sigma_0 - \sigma_0}{2} = 0$ ✓



تمرین:

تانسور تنش در نقطه‌ای از یک سازه بصورت MPa $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 25 & 15 & 0 \\ 15 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

در این نقطه مقدار تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

(۴) $25 MPa$

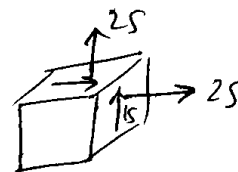
(۳) $20 MPa$ ✓

(۲) $15 MPa$

(۱) $10 MPa$

$\tau_{max} = \frac{40 - 0}{2} = 20$ ← $\sigma_1 = 40$
 $\sigma_2 = 10$

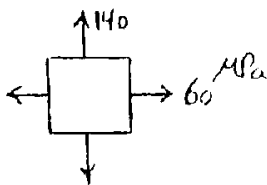
← $\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 50 \\ \sigma_1 \sigma_2 = 25^2 - 15^2 = 400 \end{cases}$



تمرین: آزاد ۹۰

۴۶- در المان کرنش مسطح (Plane strain) نشان داده شده حداکثر تنش برش کدام است؟

($\nu = 0.25, E = 200 GPa$)



(۱) $30 MPa$

(۲) $40 MPa$

(۳) $45 MPa$ ✓

(۴) $70 MPa$

گفته کرنش مسطح یعنی $\epsilon_z = 0$ (۴ محور بر صفر) صفر است
 $\epsilon_z = (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) / E = 0 \Rightarrow (\sigma_z - 2 \times 60 - 2 \times 140) = 0$
تنش محور بر صفر که باید اندازه است
 $\rightarrow \sigma_z = 50$ ✓

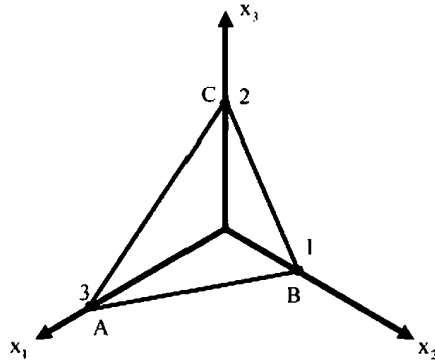


$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{140 - 50}{2} = 45 MPa$

۹- میدان تانسور در نقطه‌ای به صورت $(MPa) \times 10^2$ داده شده است. بردار تنش بر روی

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

صفحه‌ای که از سه نقطه $A(3, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ می‌گذرد، کدام است؟



$$(1) \quad 14/6(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3)$$

$$(2) \quad 28/6(3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 17\bar{e}_3)$$

$$(3) \quad 14/6(2\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3)$$

$$(4) \quad 28/6(3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3)$$

گزینه ؟

اگر "تانسور تنش" به "بردار یکه نرمال یک سطح" ضرب شود، حاصل برداری خواهد بود که نشان دهنده بردار تنش بر روی آن سطح خواهد بود.

یافتن بردار یکه نرمال سطح:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad 2x + 6y + 3z = 6$$

$$\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7$$

$$n = \frac{2}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{3}{7}k$$

بردار تنش:

$$10^2 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/7 \\ 6/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} \frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7} \\ \frac{12}{7} + \frac{12}{7} = \frac{24}{7} \\ \frac{4}{7} + \frac{24}{7} + \frac{6}{7} = \frac{34}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 142.85 \\ 342.85 \\ 485 \end{bmatrix}$$

۳- تانسور تنش در نقطه P توسط $\sigma_o = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ داده شده است. بردار تنش که از نقطه P عبور نموده و

موازی با صفحه ABC با مختصات: $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ کدام است؟

$$\bar{\sigma} = \frac{5}{7}\bar{i} + \frac{9}{7}\bar{j} + \frac{10}{7}\bar{k} \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{5}{7}\bar{i} - \frac{9}{7}\bar{j} + \frac{10}{7}\bar{k} \quad (2)$$

$$\bar{\sigma} = -\frac{9}{7}\bar{i} + \frac{5}{7}\bar{j} + \frac{10}{7}\bar{k} \quad (3)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{9}{7}\bar{i} - \frac{5}{7}\bar{j} + \frac{10}{7}\bar{k} \quad (4)$$

اگر "تانسور تنش" به "بردار یکه نرمال یک سطح" ضرب شود، حاصل برداری خواهد بود که نشان دهنده بردار تنش بر روی آن سطح خواهد بود.

یافتن بردار یکه نرمال سطح:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \quad \rightarrow \quad 3x + 6y + 2z = 12$$

$$\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$$

$$n = \frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j + \frac{2}{7}k$$

بردار تنش:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} \frac{21}{7} - \frac{30}{7} \\ -\frac{15}{7} + \frac{18}{7} + \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} + \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

• این بردار موازی با صفحه ABC نخواهد بود بلکه زاویه ای دلخواه با آن صفحه خواهد داشت. این بردار، بردار تنش در صفحه ABC میباشد که احتمالاً منظور طراح همین بردار می باشد.

۹- دایره مور کرنش

تنها تفاوت آن با تنش: کرنش برشی را در دایره نصف در نظر می گیریم

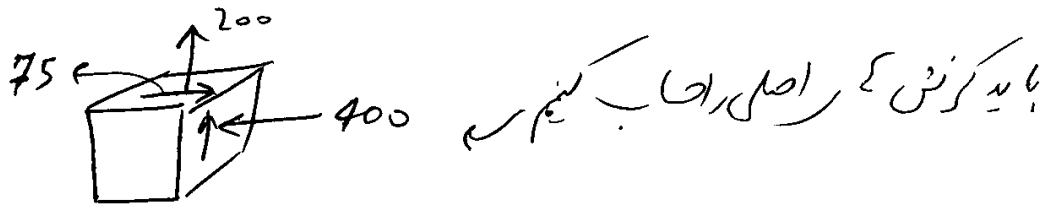
۴۳- در صورتی که در یک وضعیت کرنش صفحه ای $\epsilon_x = -400 \cdot 10^{-6}$ ، $\epsilon_y = 200 \cdot 10^{-6}$ و $\gamma_{xy} = 150 \cdot 10^{-6}$ باشد، مطلوبست محاسبه حداکثر کرنش برشی مطلق.

$$618 \cdot 10^{-6} \quad (4)$$

$$76 \cdot 10^{-6} \quad (3)$$

$$200 \cdot 10^{-6} \quad (2)$$

$$100 \cdot 10^{-6} \quad (1)$$

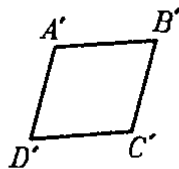
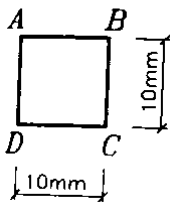


$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 &= -200 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 &= -80000 - 75^2 = 85625 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \epsilon_1 &= 209.23 \\ \epsilon_2 &= -409.23 \end{aligned}$$

$$\gamma_{max} = \left(\frac{209.23 - (-409.23)}{2} \right) \times 2 = 618.46$$

مثال

در شکل زیر المان مربع پس از بارگذاری به المان متوازی الاضلاع تبدیل می شود، بصورتیکه ضلع AB به میزان ۸ میکرومتر و ضلع AD به میزان ۴ میکرومتر افزایش طول می یابد، همچنین زاویه رأس A به میزان 3×10^{-4} رادیان بطور متقارن افزایش می یابد. کرنش برشی ماکزیمم چقدر است؟



$$360.6 \mu \quad (2)$$

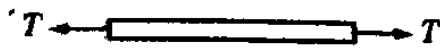
$$721.1 \mu \quad (4)$$

$$250 \mu \quad (1)$$

$$500 \mu \quad (3) \checkmark$$

میله‌ای تحت اثر نیروی محوری کششی T قرار دارد. اگر کرنش محوری ϵ_x و ضریب پواسون ν

باشد کرنش برشی ماکزیمم در میله چقدر است؟



$$\frac{\epsilon_x(1+\nu)}{2} \quad (2) \quad \frac{\epsilon_x(1-\nu)}{2} \quad (1)$$

$$\epsilon_x(1+\nu) \quad (3) \quad \epsilon_x(1-\nu) \quad (3)$$

$$\begin{cases} \epsilon_n = \epsilon_x \\ \epsilon_y = -\nu \epsilon_x \end{cases}$$

$$\gamma_{max} = 2 \left(\frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_x}{2} \right) = \epsilon_x + \nu \epsilon_x$$

سراسری ۸۸

۵۷- در نقطه‌ای بر روی سطح بدنه جسمی کرنش‌های اصلی منطبق بر سطح عاری از بار جانبی خارجی برابر $\epsilon_1 = +3.5 \times 10^{-4}$ و

$\epsilon_2 = +1 \times 10^{-4}$ اندازه‌گیری شده است. اگر مدول برشی برابر $G = 8 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون برابر 0.25 باشد، مقدار حداکثر تنش

برشی در نقطه مزبور بر حسب MPa چقدر است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

تنش برشی حداکثر برابر است با:

$$\tau = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

بنابراین باید تنشهای اصلی (σ_{max} و σ_{min}) را بیابیم:

$$\epsilon_1 = 3.5 \times 10^{-4} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\epsilon_2 = 1 \times 10^{-4} = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E}$$

از آنجا که گفته بر سطح عاری از بار خارجی پس $\sigma_3 = 0$ است. با توجه به رابطه $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ مقدار E برابر 20 GPa خواهد بود و داریم:

$$20 \times 10^9 \times 3.5 \times 10^{-4} = 7 \times 10^6 = \sigma_1 - 0.25\sigma_2$$

$$20 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-4} = 2 \times 10^6 = \sigma_2 - 0.25\sigma_1$$

با حل دو معادله فوق:

$$\sigma_1 = 8 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 4 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\tau = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{8 - 0}{2} = 4 \text{ MPa}$$

۴۶- کرنش‌های اندازه‌گیری شده در دو صفحه عمود برهم یک المان صفحه‌ای برابر با ۱۰ و ۲۰ میکرواسترین می‌باشد، اگر یکی از تنش‌های اصلی در این المان ۵۰ مگاپاسکال باشد محاسبه تنش بردشی حداکثر ایجاد شده در این المان؟ ($E = 7 \times 10^6 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$)

80 MPa (۲)

50 MPa (۱)

120 MPa (۴)

100 MPa (۳)

گزینه ۳

می‌دانیم مجموع کرنش‌ها در هر دو صفحه برابر است. بنابراین جمع کرنش‌های ماکزیمم و مینیمم برابر $(20+10)/2=15$ میکرواسترین خواهد بود. از طرفی کرنش‌های اصلی را می‌توان به شرح زیر محاسبه کرد:

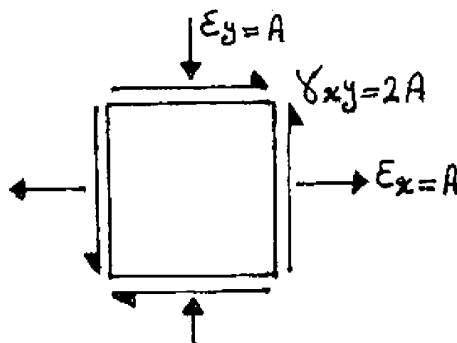
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - 0.3\sigma_2) = \frac{1}{E}(50 - 0.3\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - 0.3\sigma_1) = \frac{1}{E}(\sigma_2 - 0.3 \times 50) \end{aligned} \right\} \rightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(35 + 0.7\sigma_2) = 30 \rightarrow \sigma_2 = 250 \text{ MPa}$$

و بنابراین تنش بردشی ماکزیمم برابر خواهد بود با:

$$\tau_{max} = \frac{(250 - 50)}{2} = 100 \text{ MPa}$$

سراسری ۸۸

۵۸- در المان نشان داده شده، در حالت تنش مسطح، حداکثر کرنش (تنجش) بردشی کدام است؟

 $2\sqrt{2}A$ (۱) $\sqrt{2}A$ (۲)

۲A (۳)

 $2\sqrt{2}A$ (۴)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 &= -A^2 - A^2 = -2A^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{2}A \\ \varepsilon_2 &= -\sqrt{2}A \end{aligned} \Rightarrow \gamma_{max} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}A + \sqrt{2}A}{2} \right) = 2\sqrt{2}A$$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_{90} + \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45}$$

مثال

کرنشهای اندازه‌گیری شده در راستای 0° و 45° و 90° در یک نقطه از سازه تحت اثر یک بارگذاری بترتیب برابر $-\varepsilon$ ، 6ε و 5ε می‌باشد. در این نقطه کرنشهای اصلی کدامند؟

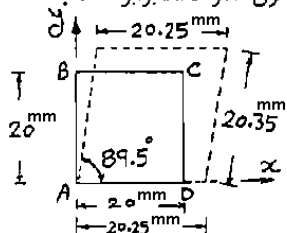
- (۱) 5ε و $-\varepsilon$ (۲) 6ε و -2ε (۳) 7ε و -3ε ✓ (۴) 8ε و -4ε

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \Rightarrow 6\varepsilon_0 = \frac{-\varepsilon_0 + 5\varepsilon_0}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \rightarrow \gamma_{xy} = 8\varepsilon_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = -\varepsilon_0 \\ \varepsilon_y = +5\varepsilon_0 \\ \gamma_{xy} = 8\varepsilon_0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -5\varepsilon_0^2 - 16\varepsilon_0^2 = -21\varepsilon_0^2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = -3\varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 = 7\varepsilon_0 \end{array} \right.$$

سراسری ۸۲

۴۰- صفحه مربع شکل ABCD به صورت خط چین تغییر شکل نموده است. کرنش محوری ایجاد شده در طول قطر AC برابر است با:



- (۱) ۰٫۰۱۶۶
(۲) ۰٫۰۲۳۱
(۳) ۰٫۰۳۲۱
(۴) ۰٫۰۱۹۴

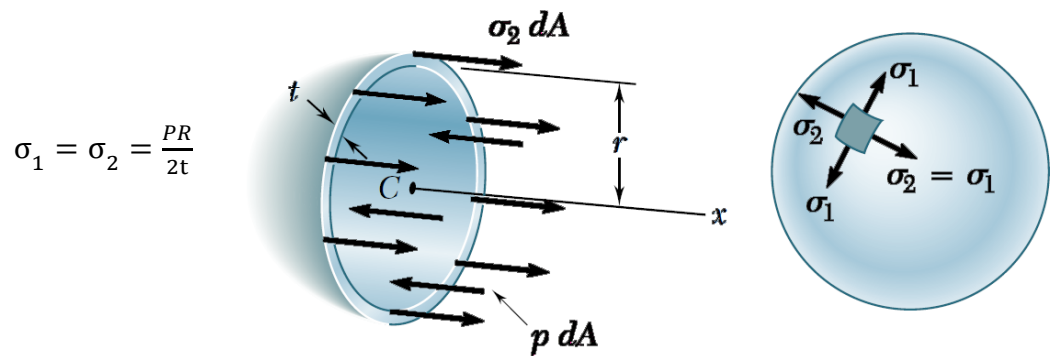
$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{0.25}{20} = 0.0125 \\ \varepsilon_y = \frac{0.35}{20} = 0.0175 \\ \gamma_{xy} = \frac{0.5 \times 20}{360} = 0.00277 \end{array} \right\} \varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}}{2} = 0.01913$$



مخازن جدار نازک کروی:

جدار مخازن کروی همانند یک بادکند که فوت کرده باشیم، تحت اثر کشش قرار دارد. در شکل سمت راست این کشش ها با $\sigma_1 = \sigma_2$ نشان داده شده است.

برای محاسبه این تنشها مطابق شکل سمت راست چپ سازه را دو نیم می کنیم:



$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{PR}{2t}$$

تنش برشی ماکزیمم در مخزن کروی؟

تغییر ضخامت کره تحت اثر فشار P؟

$$\varepsilon_z = 0 - \frac{2\nu\sigma}{E} = -\frac{\nu PR}{tE}$$

$$\Delta t = \varepsilon_z t = -\frac{\nu PR}{E}$$

تغییر مساحت کره تحت فشار P؟

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 2 \frac{(\sigma - \nu\sigma)}{E} = 2(1 - \nu) \frac{PR}{2tE}$$

$$\Delta A = \varepsilon_A \times A = (1 - \nu) \frac{PR}{tE} (4\pi R^2) = (1 - \nu) \frac{4\pi PR^3}{tE}$$

کرنش شعاعی و کرنش محیطی چیست؟

تغییر حجم کره تحت فشار P؟

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 3\varepsilon_\theta = 3 \frac{(\sigma - \nu\sigma)}{E} = 3(1 - \nu) \frac{PR}{2tE}$$

$$\Delta V = \varepsilon_V \times V = 3(1 - \nu) \frac{PR}{2tE} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

آزاد ۹۲

۴۶- مخزن جدار نازک کروی تحت فشار داخلی $50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ قرار دارد اگر شعاع متوسط مخزن ۳ متر باشد حداقل

ضخامت مخزن کدام است؟ (تنش مجاز کششی مصالح $2500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ می‌باشد)

۲ cm (۲)

۱ cm (۱)

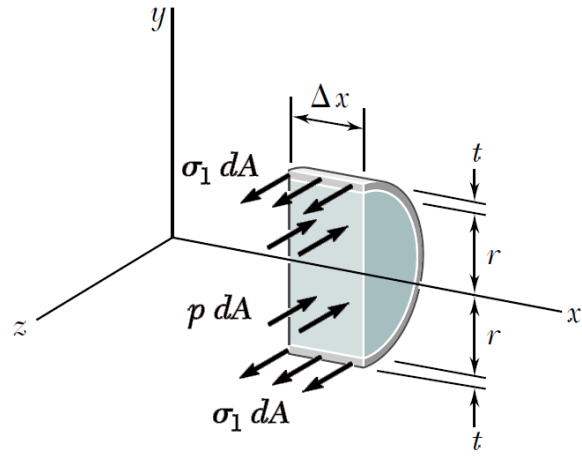
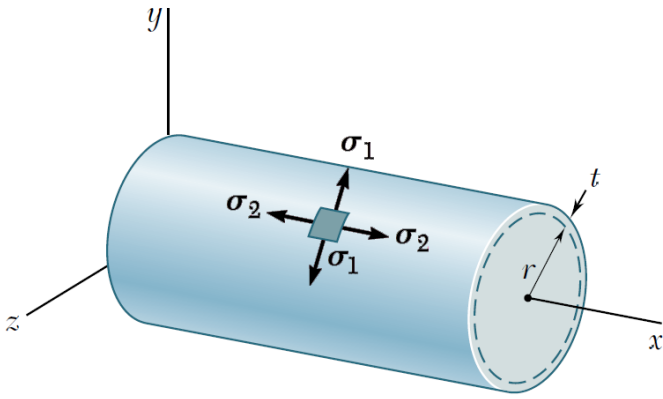
۴ cm (۴)

۳ cm (۳)

گزینه ۳

$$\left(\sigma = \frac{PR}{2t} = \frac{50 \times 300}{2t} \right) \leq 2500 \quad \rightarrow \quad t \geq 3 \text{ cm}$$

مخزن جدارنازک استوانه ای:

مقدار تنش محیطی (σ_θ)؟

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{PR}{t}$$

مقدار تنش طولی (σ_L)؟با انتهای بسته: $\sigma_L = \frac{PR}{2t}$ با انتهای باز: $\sigma_L = 0$ در انتها تکیه گاه داشته باشیم (و یا طول بینهایت): $\sigma_L = v \frac{PR}{t}$

تنش برشی ماکزیمم؟

تغییر ضخامت مخزن استوانه ای با انتهای بسته تحت اثر فشار P؟

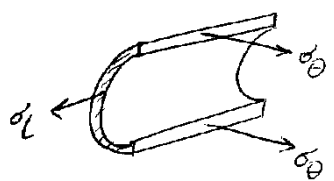
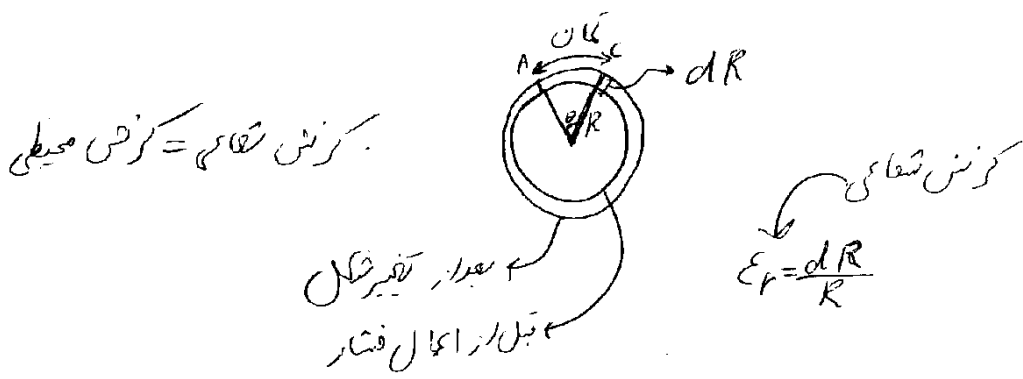
$$\varepsilon_z = 0 - \frac{v\sigma_\theta}{E} - \frac{v\sigma_L}{E} = -\frac{3vPR}{2tE}$$

$$\Delta t = \varepsilon_z t = -\frac{3vPR}{2E}$$

۴۸- یک لوله انتقال گاز طویل جدار نازکی با شعاع متوسط R و ضخامت t در زیر اقیانوس با فشار هیدرواستاتیکی P قرار دارد. اگر فشار داخلی لوله برابر با $3P$ و کرنش سنج نصب شده در امتداد شعاعی لوله عدد ϵ_θ را نمایش دهد مقدار P کدام است؟ (E و ν مشخصات مصالح لوله می باشند).

$$P = \frac{E \cdot \epsilon_\theta \cdot t}{2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot R} \quad (۱) \qquad P = \frac{2E \cdot \epsilon_\theta \cdot t}{(1 + \nu^2) \cdot R} \quad (۱)$$

$$P = \frac{3E \cdot \epsilon_\theta \cdot t}{(1 + \nu^2) \cdot R} \quad (۴) \qquad P = \frac{E \cdot \epsilon_\theta \cdot t}{4 \cdot (1 - \nu^2) \cdot R} \quad (۳)$$



از کرنش در رینگ در طول زیاد تقابلهای هم درجه بزرگترند

بهبات جهت کرنش طول آن است و نمی تواند افزایش طول داشته باشد

$$\sigma_\theta = \frac{2PR}{t}$$

$$\epsilon_L = 0 \rightarrow \sigma_L - \nu(\sigma_\theta) = 0 \rightarrow \sigma_L = \nu\sigma_\theta = \frac{2\nu PR}{t}$$

$$\epsilon_r = \epsilon_t = \epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_L}{E} = \frac{2PR}{tE} - \nu \left(\frac{2\nu PR}{tE} \right) = \frac{2PR(1 - \nu^2)}{tE}$$

$$\rightarrow P = \frac{\epsilon_\theta E t}{2R(1 - \nu^2)}$$

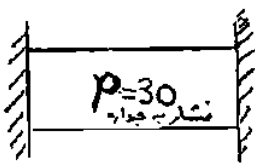
استوانه جدار نازک طولی به قطر 100 mm و ضخامت 3 میلیمتر، تحت اثر فشار داخلی 6 MPa قرار گرفته است. تنش طولی ایجاد شده در آن چند MPa است؟ ($\nu = 0.3$)

- ۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

$$\epsilon_L = 0 \rightarrow \sigma_L = \nu\sigma_\theta = \nu \frac{PR}{t} = 0.3 \frac{6 \times 50}{3} = 30\text{ MPa}$$

سراسری ۸۱

۳۷- استوانه جدارنازکی از طرف دو قاعده بین دو تکیه‌گاه صلب مطابق شکل مقابل قرار گرفته است. قطر استوانه ۸۰cm، ضخامت جداره آن ۲cm، $\rho = 30 \frac{kg}{cm^3}$ و $\nu = 0.3$ می‌باشد. تنش‌های مماسی و طولی بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ به ترتیب کدام است؟



- (۱) ۱۸۰ و ۶۰۰
- (۲) ۶۰۰ و صفر
- (۳) ۳۰۰ و ۶۰۰
- (۴) ۳۰۰ و ۹۰

$$\sigma_{\theta} = \frac{F}{2Lt} = \frac{(pL \times 2R)}{2Lt} = \frac{pR}{t} \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{30 \times 40}{2} = 600$$

$$\epsilon_L = 0 \rightarrow \frac{\sigma_L}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta}}{E} = \frac{\sigma_L}{E} - \frac{0.3 \times 600}{E} = 0 \rightarrow \sigma_L = 180$$

سراسری ۸۲

۴۶- یک لوله طولی و مستقیم انتقال گاز در داخل زمین و زیر اثر فشار داخلی 1 kg/cm^2 قرار گرفته است. قطر لوله ۵۰ سانتیمتر و ضخامت جدار آن یک سانتیمتر

است. تنش طولی در آن چند کیلوگرم بر سانتیمتر مربع است. $E = 2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ و $\nu = 0.3$

- (۱) صفر
- (۲) ۱۵۰
- (۳) ۲۵۰
- (۴) ۵۰۰

از آنجا که طول لوله بینهایت است و در داخل خاک قرار دارد، تغییر طول آن باید صفر باشد:

$$\epsilon_L = 0 \rightarrow \sigma_L = \nu \sigma_{\theta} = \nu \frac{pR}{t} = 0.3 \frac{10 \times 25}{1} = 75 \text{ MPa}$$

(در گزینه‌ها نیست)

سراسری ۷۷

۴- اگر قطر یک مخزن استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت ثابت و رفتار خطی که تحت فشار V اتمسفر

قرار گرفته است دو برابر شود تنش کششی در جدار آن ...

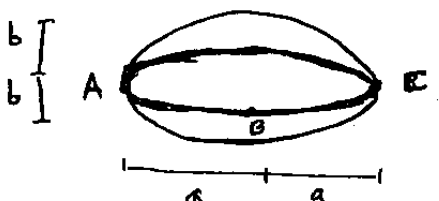
- (۱) بوجود نمی‌آید
- (۲) تفاوتی نمی‌کند.
- (۳) دو برابر می‌شود.
- (۴) نصف می‌شود.

گزینه ۳

آزاد ۸۵

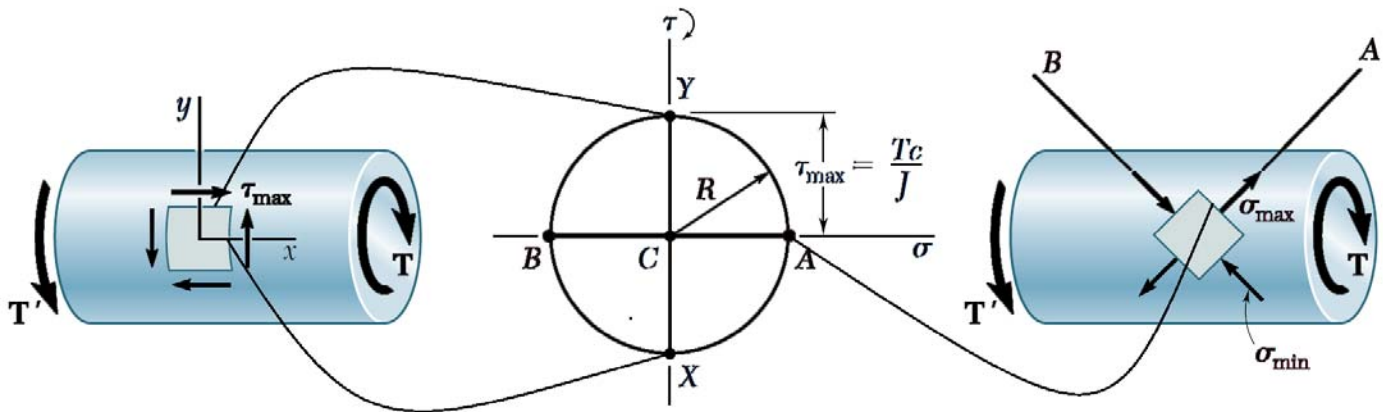
۶۲- در مخزن بیضوی زیر که حاصل دوران بیضی موجود در صفحه حول قطر AC می‌باشد تحت اثر فشار داخلی P تنش کششی افقی در B چقدر است؟

(ضخامت مخزن ثابت و برابر t می‌باشد.)



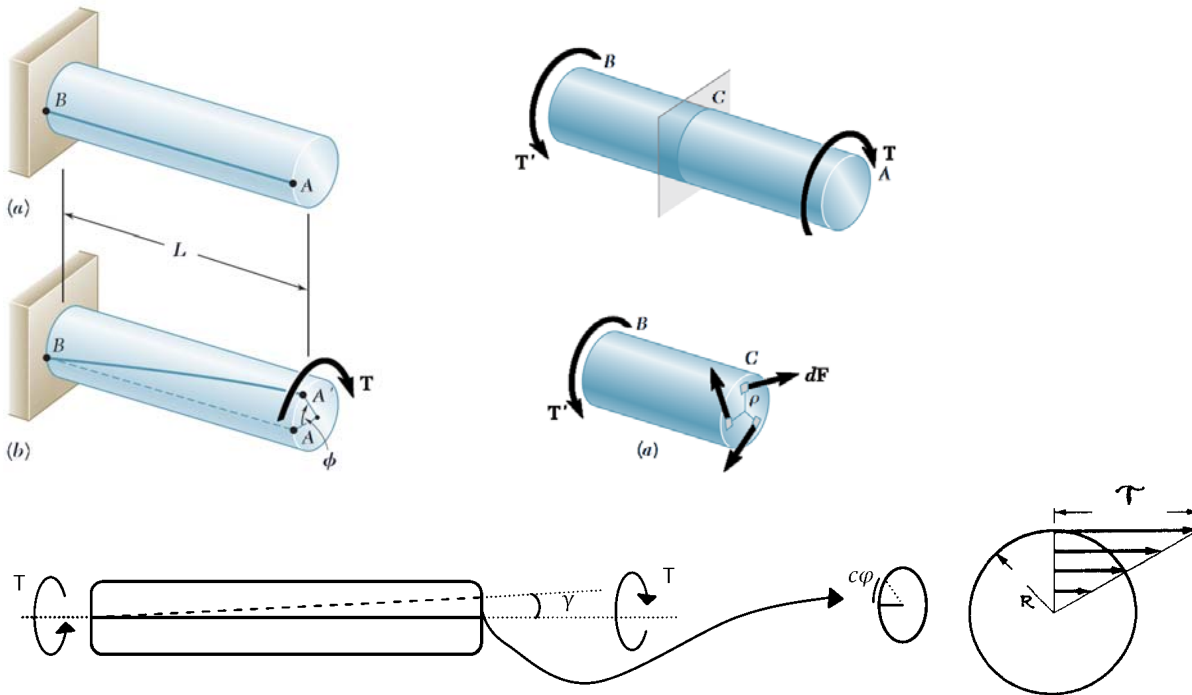
- (۱) $\frac{Pb}{2t}$
- (۲) $\frac{Pa}{2t}$
- (۳) $\frac{Pa^2}{2bt}$
- (۴) $\frac{Pb^2}{2at}$

گزینه ۱:



در مواردی که تنش برشی خالص داریم، تنش محوری کششی حداکثر = تنش محوری فشاری حداکثر = تنش برشی حداکثر

۱۲-۱- مقطع دایروی



$J = \frac{\pi}{2} R^4$ ممان اینرسی قطبی دایره:

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ مدول برشی:

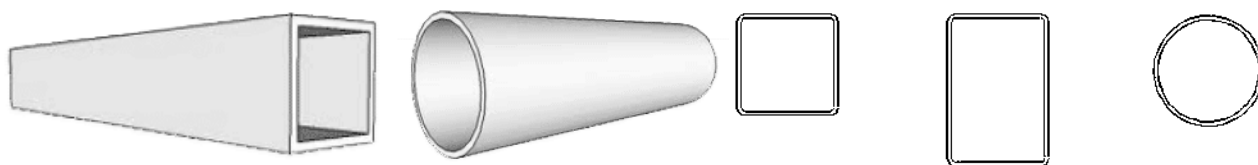
$\frac{GJ}{L}$ سختی پیچشی:

$\tau = \frac{Tr}{J}$ رابطه تنش:

$T = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{J}{r}$ مقاومت پیچشی:

$\varphi = \frac{TL}{GJ}$ زاویه پیچش:

۱۲-۲- مقاطع جدارنازک بسته



$$J = \frac{4A_m^2}{\int \frac{ds}{t}} = \frac{4A_m^2 t}{P}$$

ممان اینرسی پیچشی جدارنازک بسته:

A_m : مساحت محصور در خط مرکزی. برای مثال برای مقطع قوطی به ضلع متوسط a برابر $A=a^2$ می باشد.
 P : طول (محیط) مقطع. برای مثال برای مقطع قوطی به ضلع a برابر $P=4a$ می باشد.

$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

رابطه تنش:

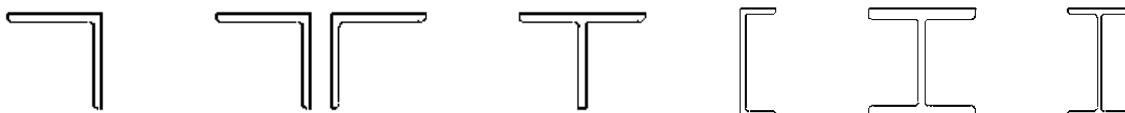
$$T = \tau_{\text{مجاز}} \times 2A_m t$$

مقاومت پیچشی:

$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

زاویه پیچش:

۱۲-۳- مقاطع جدارنازک باز



$$J = \sum \frac{P_i t_i^3}{3}$$

ممان اینرسی پیچشی جدارنازک باز:

$$\tau = \frac{T t_i}{J} = \frac{T t_i}{\frac{\sum P_i t_i^3}{3}} = \frac{3T t_i}{\sum P_i t_i^3}$$

رابطه تنش:

$$\tau = \frac{3T}{P t^2}$$

رابطه تنش در صورتی که ضخامت جدار ثابت باشد:

$$T = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{J}{t}$$

مقاومت پیچشی:

$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

زاویه پیچش:

۱- یک مقطع جدار نازک نیم دایره‌ای شکل به ضخامت $t = 1 \text{ cm}$ و شعاع متوسط $R = 20 \text{ cm}$ تحت لنگر پیچشی

$T = 1.2 \text{ kN.m}$ قرار دارد. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در مقطع بر حسب مگاپاسکال به کدام گزینه نزدیکتر است؟

(۴) $\frac{180}{\pi}$

(۳) $\frac{90}{\pi}$

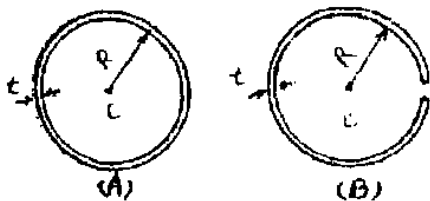
(۲) $\frac{30}{\pi}$

(۱) $\frac{45}{\pi}$

آزاد ۹۰

۵۳- مقاطع لوله‌ای A, B در شکل زیر نشان داده شده‌اند این مقاطع تحت اثر لنگر پیچشی یکنواخت T قرار دارند.

نسبت تنش برشی در مقطع B به مقطع A چقدر است؟ ($t = 0.1 R$)



(۲) ۱۵

(۱) ۱

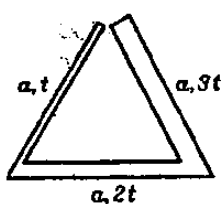
(۴) ۳۰

(۳) ۵

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \frac{T}{2\pi r^2 t} \\ \tau_B &= \frac{T}{\frac{1}{3}(2\pi r t^2)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\tau_B}{\tau_A} = \frac{2\pi r^2 t}{\frac{1}{3}(2\pi r t^2)} = \frac{3r}{t} = 30$$

آزاد ۸۶

۴۶- در مقطع جدار نازک مثلثی زیر تنش برشی ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی T چقدر است؟



(۴) $\frac{T}{12at^2}$

(۳) $\frac{T}{4at^2}$

(۲) $\frac{T}{6at^2}$

(۱) $\frac{T}{3at^2}$

$$\tau_{max} = \frac{T \times (3t)}{\frac{1}{3}(a + a + a(2t)^2 + a(3t)^2)} = \frac{T}{4at^2}$$

در جدار نازک باز تنش برشی حداکثر در ضخیم‌ترین جدار خواهد بود

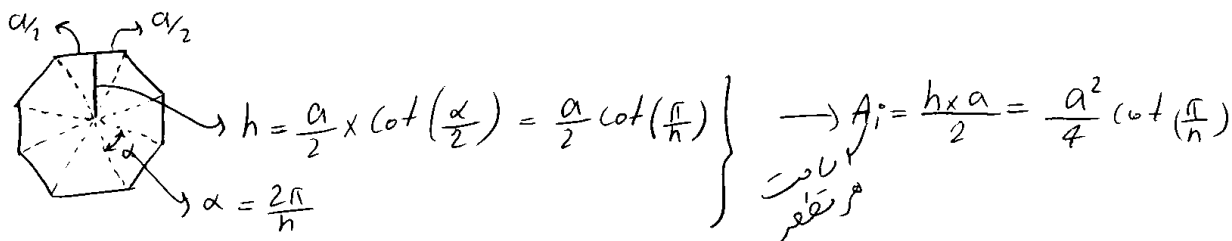
۵- تنش برشی در میله ای نو خالی جدار نازک با ضخامت t و مقطع n ضلعی منتظم تحت اثر پیچش T چقدر است؟ طول هر ضلع n ضلعی برابر a می باشد.

$$\frac{\tau T \sin \frac{\pi}{n}}{na^2 t} \quad (۴)$$

$$\frac{\tau T \sin \frac{\pi}{n}}{na^2 t} \quad (۳)$$

$$\frac{\tau \pi T}{n^2 a^2 t} \quad (۲)$$

$$\frac{\tau T \tan \frac{\pi}{n}}{na^2 t} \quad (۱)$$



$$\Rightarrow \tau = \frac{T}{2A_n t} = \frac{T}{\frac{2na^2 \cot(\frac{\pi}{n})}{4} t} = \frac{2T \cot(\frac{\pi}{n})}{na^2 t}$$

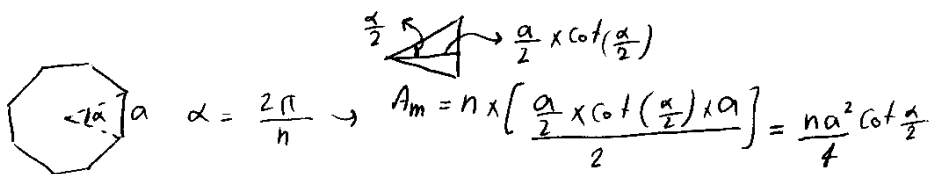
۶۸- یک مقطع n ضلعی منتظم جدار نازک تحت اثر پیچشی قرار دارد. اگر مقطع از حالت بسته به حالت باز تغییر کند تنش برشی ماکزیمم مقطع چند برابر خواهد شد؟ (طول هر ضلع مقطع n و ضخامت مقطع t می باشد.)

$$\frac{3a}{t} \cotg \frac{\pi}{2n} \quad (۱)$$

$$\frac{3a}{t} \cotg \frac{\pi}{n} \quad (۲)$$

$$1.5 \frac{a}{t} \cotg \frac{\pi}{n} \quad (۳)$$

$$1.5 \frac{a}{t} \cotg \frac{\pi}{2n} \quad (۴)$$



$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2 \left(\frac{na^2}{4} \cot \frac{\alpha}{2} \right) t} = \frac{2T}{na^2 \cot \frac{\alpha}{2} t}$$

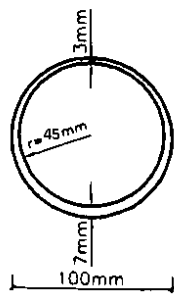


$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{\frac{3}{na^2 t^2}}{\frac{2}{na^2 \cot \frac{\alpha}{2} t}}$$

$$\tau = \frac{T}{\frac{1}{3} P t^2} = \frac{T}{\frac{1}{3} (na) t^2} = \frac{3T}{na t^2}$$

$$= \frac{3a}{2t} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3a}{2t} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

چنانچه لنگر پیچشی برابر با $2000 N.m$ بر یک لوله جداره نازک با سطح مقطع نشان داده شده با ضخامت متغیر وارد شود حداکثر تنش برشی در مقطع چند مگا پاسگال (MPa) خواهد بود؟



- ۴,۷ (۱)
۵,۲۴ (۲)
۷,۸۳ (۳)
۱۰,۹۷ (۴)

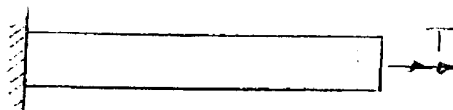
$$\text{شعاع میانگین} = 4.5 + \frac{0.3}{2} + \frac{0.7}{2} = 4.75 \text{ cm}$$

$$\bar{\tau} = \frac{T}{2A_m t} = \frac{20000}{2(4.75^2 \times \pi) \times 0.5} = 470 \frac{N}{cm^2} = 4.7 MPa$$

۹- کدام گزینه در مورد مقاطع جدار نازک صحیح است؟

- (۱) در مقاطع جدار نازک، چه بسته و چه باز، میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره کمتر می‌شود.
(۲) در مقاطع جدار نازک، چه بسته و چه باز، میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره بیشتر می‌شود.
(۳) در یک مقطع جدار نازک بسته تحت پیچش میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره بیشتر می‌شود ولی در مقطع جدار نازک باز تنش برشی در قسمت نازک جداره کمتر می‌شود.
(۴) در یک مقطع جدار نازک بسته تحت پیچش میزان تنش برشی در قسمت نازک جداره کمتر می‌شود ولی در مقطع جدار نازک باز تنش برشی در قسمت نازک جداره بیشتر می‌شود.

۵۰- به میله توپر به قطر d لنگر پیچشی T اعمال می‌شود. بیشترین تنش کششی ایجاد شده در میله چقدر خواهد شد؟



- (۱) $\sigma_{\max} = 0$
(۲) $\sigma_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$
(۳) $\sigma_{\max} = \frac{16\sqrt{2}T}{\pi d^3}$
(۴) $\sigma_{\max} = \frac{16\sqrt{2}T}{\pi d^3}$

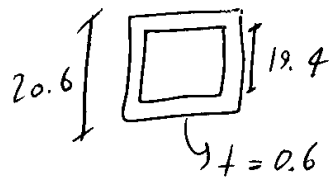
$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{T \frac{d}{2}}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^4} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\sigma = \tau = \frac{16T}{\pi d^3}$$

سراسری ۸۸

۶۰- میل‌های با مقطع قوطی زیر اثر پیچش به مقدار ۲۱.۳ متر قرار گرفته است. قوطی دارای ضلع خارجی ۲۰/۶ cm و ضلع داخلی ۱۹/۴ cm است. تنش عمودی ایجاد شده در آن بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ چقدر است؟

- (۱) $\pm ۲۰۸/۳$
- (۲) ± ۵۰
- (۳) صفر
- (۴) $\pm ۴۱۶/۷$



$$\tau = \frac{T}{2A_{mt}} = \frac{2 \times 10^5}{2 \times 20^2 \times 0.6} = 416.66 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma = \tau = 416.66 \frac{kg}{cm^2}$$

سراسری ۸۳

۵۸- اگر در داخل تیر طره ای استوانه ای شکل به قطر ۲۰ cm که میان پیچشی $\pi(t-m)$ در انتهای آن اثر می‌کند، سوراخی هم مرکز در طول تیر ایجاد نمایم بطوریکه زاویه پیچشی آن ۵٪ افزایش یابد، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر چه مقدار می‌گردد؟

- (۱) $۱۰۰ \frac{kg}{cm^2}$
- (۲) $۱۹۰ \frac{kg}{cm^2}$
- (۳) $۲۰۰ \frac{kg}{cm^2}$
- (۴) $۲۱۰ \frac{kg}{cm^2}$

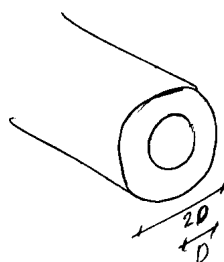
زاویه پیچش برابر است با $\phi = \frac{TL}{GJ}$ که ۱۵٪ افزایش یافته است. بنابراین $\frac{J_1}{J_2} = 1.05$

$\tau = \frac{TR}{J}$ بنابراین مقدارش حداکثر نیز ۵٪ افزایش می‌یابد. $\tau = 1.05 \times \frac{\pi \times 10^5 \times 10}{\frac{\pi}{2} \times 10^4} = 210$

آزاد ۸۳

۲۳- محور فولادی نوپری به قطر D را داخل محور فولادی دیگری به قطر داخلی D و قطر خارجی 2D قرار می‌دهیم و دو محور را به صفحه صلبی جوش می‌دهیم به صورتیکه در پیچش، پیچش هر دو محور مقدار یکسانی است. تحت اثر کویل پیچشی T نسبت تنش برشی ماکزیمم محور نواحالی به محور نوپری چقدر است.

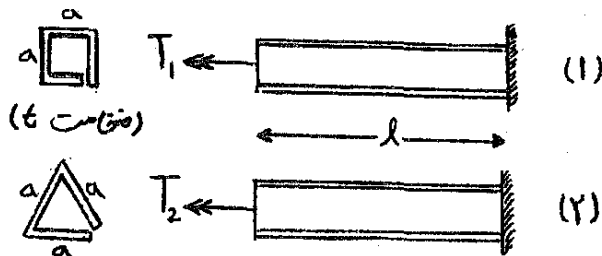
- (۱) 1.5
- (۲) 2
- (۳) 3.5
- (۴) 7.5



$$\tau_1 = \frac{TR}{J}$$

$$\tau_2 = \frac{T(2R)}{J}$$

} → ؟



۵۱- اگر تحت لنگرهای پیچشی اعمال شده زاویه پیچش انتهای هر دو میله یکسان باشد، نسبت حداکثر تنش برشی در میله (۱) به (۲) کدام است؟ (ضخامت و جنس میله‌ها یکسان است)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

گزینه ۱:

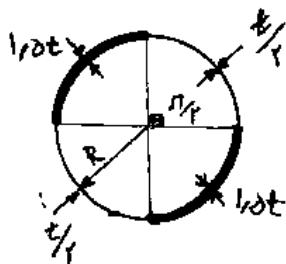
ابتدا زاویه پیچش را در هر دو محاسبه و برابر هم قرار می دهیم:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{T_1 l}{G \left(\frac{1}{3} 4 a t^3\right)} \\ \varphi_2 &= \frac{T_2 l}{G \left(\frac{1}{3} 3 a t^3\right)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{3}$$

تنش برشی تحت اثر پیچش در مقاطع جدارنازک باز (با ضخامت جدار ثابت) از رابطه $\tau = \frac{3T}{pt^2}$ بدست می آید که p طول مقطع می باشد:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3T_1}{4at^2} \\ \tau_2 &= \frac{3T_2}{3at^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{3T_1}{4T_2} = 1$$

۴۸- میله‌ای استوانه‌ای یا شعاع متوسط R، دارای جداره‌ای با ضخامت متغیر مطابق شکل است، با فرض خیلی کوچک بودن نسبت $\frac{t}{R}$ ، نسبت سختی پیچشی این میله نسبت به میله‌ای با همان طول و شعاع متوسط ولی ضخامت یکنواخت t چقدر می‌باشد؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= 2\pi R^3 \\ j_2 &= \frac{4A_m^2}{\sum \frac{p_i}{t_i}} = \frac{4(\pi R^2)^2}{\frac{\pi R}{\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{\pi R}{(1.5t)}} = \frac{3}{2} \pi R^3 \end{aligned} \right\} \frac{j_2}{j_1} = \frac{3}{4}$$

۵۱- دو میله A و B به مقطع دایره موجود است. طول و قطر میله A دو برابر طول و قطر میله B می‌باشد. لنگر پیچشی 2T به میله A و

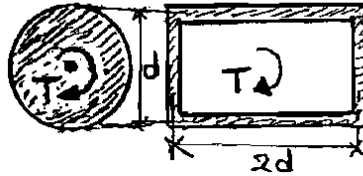
لنگر پیچشی T به میله B وارد می‌شود. نسبت تنش‌های برشی ماکزیمم میله‌ها چقدر است $\left(\frac{\tau_{max A}}{\tau_{max B}}\right)$ ؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\frac{(2T)(2R)}{\left(\frac{\pi}{2} \times (2R)^4\right)}}{\frac{TR}{\left(\frac{\pi}{2} \times R^4\right)}} = \frac{1}{4}$$

تمرین: سراسری ۸۵

۵۱- در صورتی که تنش برشی در هر دو مقطع نشان داده شده یکسان باشند حداقل ضخامت (t_{min}) مقطع مستطیلی چقدر است؟



- (۱) $\frac{\pi d}{128}$
- (۲) $\frac{\pi d}{64}$
- (۳) $\frac{\pi d}{22}$
- (۴) $\frac{\pi d}{16}$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\text{دایره}} &= \frac{T r}{J} = \frac{T \frac{d}{2}}{\frac{\pi (d/2)^4}{2}} = \frac{16T}{\pi d^3} \\ \tau_{\text{مستطیل}} &= \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(d \times 2d)t} = \frac{T}{4td^2} \end{aligned} \right\} \tau_{\text{دایره}} = \tau_{\text{مستطیل}} \rightarrow \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{T}{4td^2} \rightarrow t = \frac{\pi d}{64}$$

تمرین: آزاد ۸۹

۴۸- در استوانه جدار نازک به شعاع متوسط R و ضخامت t تنش کششی و فشاری ماکزیمم تحت اثر لنگر پیچشی T چقدر است؟

(۱) 0 و 0 (۲) $\frac{T}{2\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{2\pi R^2 t}$

(۳) $\frac{T}{4\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{2\pi R^2 t}$ (۴) $\frac{T}{4\pi R^2 t}$ و $\frac{T}{4\pi R^2 t}$

گزینه ۲

تمرین سراسری ۸۰

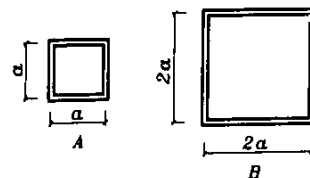
مقطع A جدار نازک بسته با ضخامت یکسان t و مقطع B جدار نازک باز با ضخامت یکسان t می‌باشد. اگر $t = \frac{a}{20}$ باشد، در مقابل یک لنگر پیچشی یکنواخت، تنش برشی در B، برابر تنش برشی در A است.

۱۵ (۴)

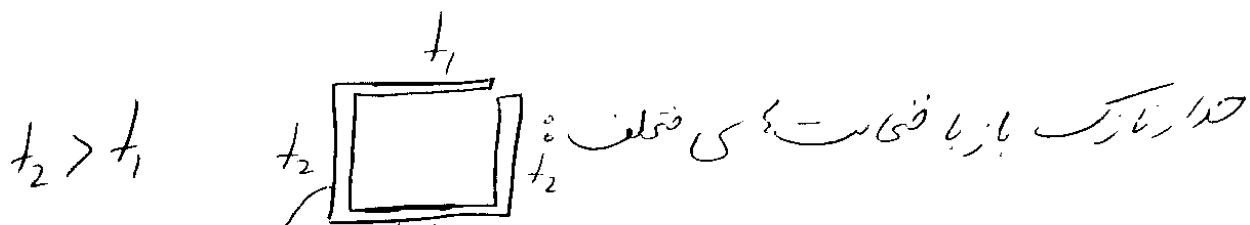
۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱ (۱)



$$\tau_B = \frac{T}{\frac{1}{3}(8a \times (\frac{a}{20})^2)} = \frac{150T}{a^3} \quad \tau_A = \frac{T}{2a^2(\frac{a}{20})} = \frac{10T}{a^3} \Rightarrow \frac{\tau_B}{\tau_A} = 15$$



$t_2 > t_1$

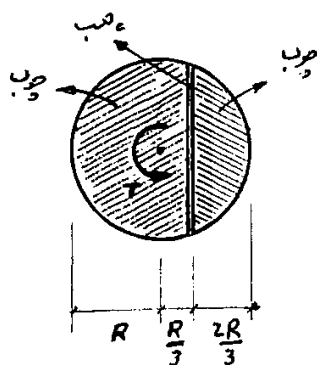
$$\tau = \frac{T t_2}{\frac{1}{3} P t_2^3}$$

$$\tau = \frac{T t_1}{\frac{1}{3} P t_1^3}$$

برعکس جدار نازک بسته که تنش ماکزیمم در نازک ترین جدار اتفاق می افتد
 در جدار نازک باز تنش ماکزیمم در ضخیم ترین جدار اتفاق می افتد

سراسری ۹۲

۵۱- عضوی به طول L با مقطع دایره ای مطابق شکل زیر تحت کوپل پیچشی T قرار گرفته است. در صورتی که مقطع از دو قسمت چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل شده تشکیل شده باشد، حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط مقطع، کدام است؟
 $\tau =$ تنش برشی مجاز چسب، $\tau = 2/5 \tau$ = تنش برشی مجاز چوب



(۱) $\frac{2\sqrt{2}}{2\pi} R^3$

(۲) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R^3$

(۳) $\frac{2\pi}{3\sqrt{2}} R^3$

(۴) $\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} R^3$

گزینه ۴ صحیح است.

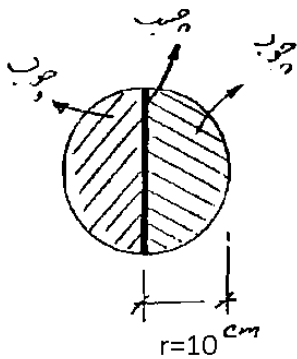
کنترل تنش حداکثر در چوب:

$$\frac{TR}{J} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2T}{\pi R^3} < 2.5\tau \rightarrow T < 1.25\pi R^3 \tau$$

کنترل تنش حداکثر در چسب (در مواردی که چسب داریم باید مولفه عمود بر راستای چسب را کنترل کنیم):

$$\frac{TR}{J} \times \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}T}{3\pi R^3} < \tau \rightarrow T < \frac{3\pi R^3}{4\sqrt{2}} \tau$$

۵۴- عضوی با مقطع دایره ای مطابق شکل تحت کویل پیچشی T قرار گرفته است. مقطع عضو از دو نیم دایره با جنس چوب که توسط چسب به یکدیگر متصل شده تشکیل شده است در صورتی که تنش مجاز چوب $۱ \cdot \text{kg/cm}^2$ و تنش مجاز چسب ۲ kg/cm^2 باشد. مطلوب است حداکثر کویل پیچشی مجاز مقطع $J = ۷۸۵۴ \text{ cm}^4$

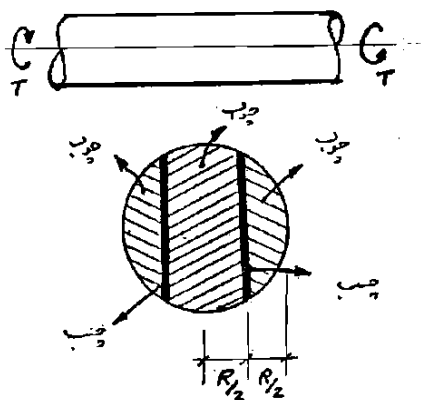


- ۱) ۱۲۵۷ kg.cm
- ۲) ۲۱۴۲ kg.cm
- ۳) ۷۸۵۴ kg.cm
- ۴) ۱۹۶۳۵ kg.cm

این روش با کم کاربرد

$$\tau = \frac{TR}{J} = \frac{T \times 10}{7854} < 4 \rightarrow T = 3141.6 \text{ kg.cm}$$

۶- عضوی مطابق شکل تحت کویل پیچشی T قرار دارد. مقطع از سه قسمت چوبی که توسط چسب به یکدیگر متصل شده‌اند، تشکیل یافته است. مطلوب است حداکثر کویل پیچشی قابل تحمل توسط آن:



تنش مجاز برشی چسب = $\tau \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

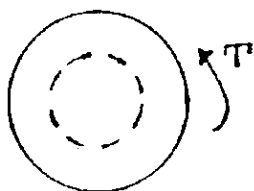
تنش مجاز برشی چوب = $۵\tau \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

- ۱) $\frac{J}{R} \cdot \tau$
- ۲) $\frac{2}{3} \cdot \frac{J}{R} \cdot \tau$
- ۳) $\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{J}{R} \cdot \tau$
- ۴) $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{J}{R} \cdot \tau$

گزینه ۴

سراسری ۸۳

۵۵- چه سهمی از گویل پیچشی T توسط بخش مرکزی مقطع که دارای نصف مساحت دایره است تعریف می گردد؟

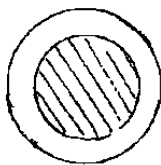


- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{16}$

$$A_1 = \frac{A}{2} \rightarrow \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{J_{\text{مکزی}}}{J_{\text{کل}}} = \frac{\frac{\pi}{2} \times r^4}{\frac{\pi}{2} \times R^4} = \frac{1}{4}$$

سراسری ۸۴

۵۹- میلنای توپر به مقطع دایره به شعاع R زیر اثر لنگر پیچشی T است. مساحت هاشور خورده داخلی به شعاع چقدر باشد تا لنگر

پیچشی $\frac{T}{4}$ در آن قرار گیرد؟

$$\frac{R}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = ۰,۷۰۷ R \quad (۲)$$

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = ۰,۷۰۷ R \quad (۳)$$

$$\frac{R}{\sqrt{2}} = ۰,۷۰۷ R \quad (۴)$$

$$\frac{J_{\text{هاشور}}}{J_{\text{کل}}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} r^4}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

۵۱- یک میله فولادی به قطر d_1 درون یک لوله توخالی برنجی به قطر داخلی d_1 و قطر خارجی d_2 قرار داده شده است و میله یکپارچه‌ای بدست آمده است. برای اینکه تحت اثر یک لنگر پیچشی، میله و لوله لنگرهای پیچشی یکسانی را تحمل کنند،

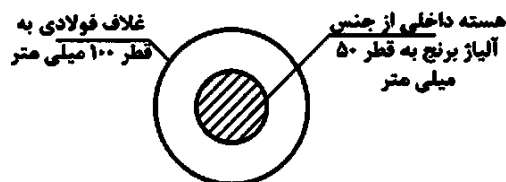
نسبت $\frac{d_2}{d_1}$ چقدر باید باشد؟ ($G_{st} = 2G_{br}$)

(۱) $\sqrt[3]{3}$ (۲) $\sqrt[4]{2}$

(۳) $\sqrt[4]{6}$ (۴) $\sqrt{2}$

دکتری ۹۵

۱۵- در شکل زیر، که تحت لنگر پیچشی T قرار دارد، چند درصد از لنگر پیچشی توسط هسته مرکزی مقطع تحمل می‌گردد؟ ($G_b = ۳۶ \text{ GPa}, G_{st} = ۷۲ \text{ GPa}$)



(۱) $\frac{۳}{۲۳}$

(۲) $\frac{۶}{۲۵}$

(۳) $\frac{۲۵}{۵۰}$

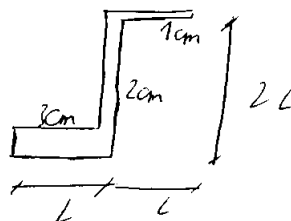
(۴) $\frac{۵۰}{۵۰}$

گزینه ۱

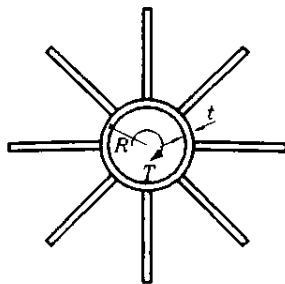
$$\frac{G_{\text{هسته}}}{G_{\text{هسته}} + G_{\text{پوسته}}} = \frac{36 \times 50^4}{36 \times 50^4 + 72 \times (100^4 - 50^4)} = 0.0323$$

مثال: سهم قسمت ۳ سانتی از تحمل پیچش چقدر است؟

$$\frac{J_3}{J} = \frac{\frac{1}{3}(3^3 L)}{\frac{1}{3}(3^3 L + 2^3(2L) + 1^3 L)} = \frac{27}{44}$$



۵- میله‌ای با سطح مقطع نشان داده شده در شکل تحت تأثیر لنگر پیچشی T قرار دارد. شعاع متوسط دایره R و ضخامت آن t می‌باشد. ضخامت هر یک از ورقهای اتصالی به دایره جدار نازک t و طول آن $2\pi R$ می‌باشد. چنانچه نسبت $\frac{R}{t} = 10$ باشد، چند درصد لنگر پیچشی T توسط جداره نازک دایره‌ای شکل تحمل خواهد شد؟



- ٪۹۱،۲ (۱)
- ٪۹۵،۳ (۲)
- ٪۹۷،۴ (۳)
- ٪۹۹،۲ (۴)

سؤال

$$J = \left(\frac{\pi}{2} R^4\right) = 4 \left(\frac{\pi}{2} R^3\right) dR = 2\pi R^3 t$$

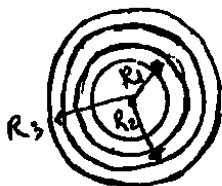
$$J_{\text{جدار نازک}} = 8 \left[\frac{1}{3} L t^3\right] = \frac{8}{3} \times (2\pi R) (t)^3 = \frac{16\pi R t^3}{3}$$

لنگر پیچشی به نسبت J بین آنها تقسیم می‌شود

$$\text{قسمت دایره} = \frac{J_{\text{دایره}}}{J_{\text{دایره}} + J_{\text{جدار نازک}}} = \frac{2\pi R^3 t}{2\pi R^3 t + \frac{16}{3}\pi R t^3}$$

$\frac{R}{t} = 10 \rightarrow \text{قسمت دایره} = 0.974$

۶۵- در مقطع لوله ای یکپارچه زیر که از سه نوع فلز با ضخامت های یکسان تشکیل شده است تحت اثر یک لنگر پیچشی، لنگر پیچشی تحمل شده توسط قسمت‌های مختلف مقطع یکسان است. کدام رابطه زیر صحیح می باشد؟
(R_1 شعاع متوسط قسمت ۱ است و $R_1 \ll t$)



$$G_1 R_1^3 = G_2 R_2^3 = G_3 R_3^3 \quad (۲)$$

$$\frac{G_1}{R_1^3} = \frac{G_2}{R_2^3} = \frac{G_3}{R_3^3} \quad (۱)$$

$$G_1 R_1 = G_2 R_2 = G_3 R_3 \quad (۳)$$

$$\frac{G_1}{R_1} = \frac{G_2}{R_2} = \frac{G_3}{R_3} \quad (۴)$$

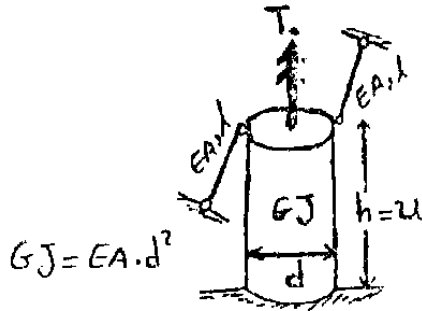
$$\left(\frac{GJ}{L}\right)_1 = \left(\frac{GJ}{L}\right)_2 \rightarrow \frac{G_1(2\pi R_1^3 t)}{L} = \frac{G_2(2\pi R_2^3 t)}{L} = \frac{G_3(2\pi R_3^3 t)}{L}$$

$$G_1 R_1^3 = G_2 R_2^3 = G_3 R_3^3$$

نسبتی بین لنگر پیچشی و مقطع برابر است
 $J = \left(\frac{\pi}{2} R^4\right) = 2\pi R^3 t$

۵۲- به استوانه‌ای به ارتفاع h و صلبیت پیچشی GJ که توسط دو میله با صلبیت محوری EA و طول l در جهت عمود بر خود نگه داشته شده است، لنگر پیچشی T_0 اعمال گردیده است. نیروی محوری ایجاد شده در میله‌ها

کدام است؟



$$\frac{T_0}{2d} \quad (۲)$$

$$\frac{T_0}{d} \quad (۱)$$

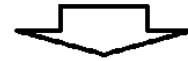
$$\frac{T_0}{4d} \quad (۴)$$

$$\frac{2T_0}{d} \quad (۳)$$

$$k = \frac{GJ}{h} = \frac{EA d^2}{2L}$$

سختی پیچشی استوانه ←

سختی پیچشی میله‌های نگهدارنده



اگر T_0 را میله تحمل کند نیروی کمتری برابر $F = \frac{T_0}{d}$ خواهد بود

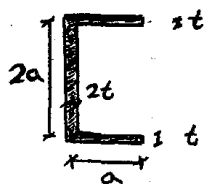
تغییر طول کمتری برابر $\delta = \frac{FL}{EA}$ خواهد بود در نتیجه دوران کمتری T_0

$$k = \frac{T_0}{\theta} = \frac{EA d^2}{2L} \quad \text{برابر} \quad \theta = \frac{\delta}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{2T_0 L}{EA d^2}$$

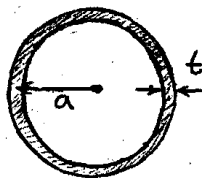
T_0 به نسبت سختی بین استوانه و میله که تقسیم می‌شود

سختی میله که برابر سختی استوانه است

$$T = \frac{T_0}{2} \Rightarrow \text{نیروی میله} = \frac{T_0}{2d}$$



(۱)



(۲)

۴۹- نسبت صلبیت پیچشی مقطع (۲) به (۱) کدام است؟

(جنس مصالح هر دو مقطع یکسان می باشد و $\frac{a}{t} = 30$)

۲۰۰ π (۳)

۱۰۰ π (۱)

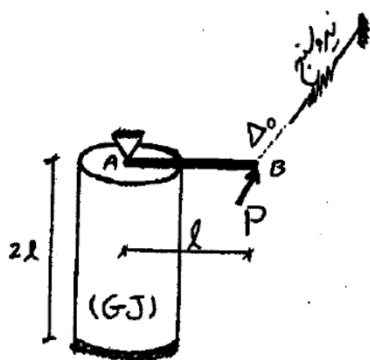
۴۰۰ π (۴)

۳۰۰ π (۳)

گزینه ۳

صلبیت پیچشی از رابطه GJ محاسبه می شود. با توجه به اینکه جنس یکسان است، داریم:

$$\frac{GJ_2}{GJ_1} = \frac{\left(\frac{\pi a^4}{2}\right)'}{\frac{1}{3}(ta^3 + ta^3 + (2t)(2a)^3)} = \frac{2\pi a^3 t}{6at^3} = 300\pi$$



۴۹- انتهای میله صلب AB قبل از بارگذاری از انتهای نیروسنج به اندازه Δ_0 فاصله دارد، حداکثر مقدار P قابل اعمال چقدر باشد تا نیروسنج عددی را نشان ندهد؟ (تکیه گاه A مفصلی و صلبیت پیچشی استوانه برابر با GJ می باشد)

$\frac{GJ}{l^3} \times \Delta_0$ (۳)

$\frac{1}{2} \frac{GJ}{l^3} \times \Delta_0$ (۱)

$\frac{1}{4} \frac{GJ}{l^3} \times \Delta_0$ (۴)

$2 \frac{GJ}{l^3} \times \Delta_0$ (۲)

گزینه ۱

مقدار Δ_0 را بر حسب P بدست می آوریم:

$$T = P \times l \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{Pl \times 2l}{GJ} \quad \rightarrow \quad \Delta_0 = \varphi \times l = \frac{2Pl^3}{GJ}$$

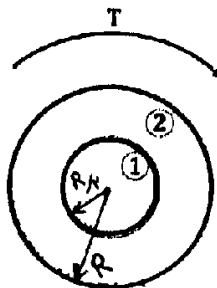
بنابراین P باید کمتر از مقدار زیر باشد:

$$P = \frac{\Delta_0 GJ}{2l^3}$$

۴۸- در مقطع ناهمگن زیر چنانچه بخواهیم مقطع بهینه باشد، باید چه نسبتی بین

مدول برشی برقرار باشد؟ (مقطع بهینه مقطعی است که مصالح (۱) و (۲) به

صورت همزمان به حد جاری شدن می رسند)



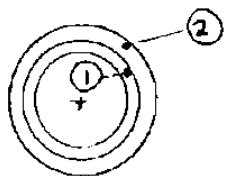
$G_1 = 2G_2$ (۱)

$G_1 = \frac{1}{2}G_2$ (۲)

$G_1 = \frac{5}{32}G_2$ (۳)

$G_1 = \frac{22}{5}G_2$ (۴)

۴۵- میله ای از دو جنس مطابق شکل تشکیل یافته است بطوری که $G_1 = 2G_2$. شعاع دایره ها بر ترتیب ۲۰، ۲۵ و ۱۸ میلیمتر می باشد. زیر اثر پیچش نسبت تنش جنس ۲ به تنش جنس ۱ چقدر است؟



$$\frac{25}{9} \quad (4)$$

$$2/5 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1/25 \quad (1)$$

۱۲-۵- مقاومت پیچشی

$$T = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{J}{R} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi R^4}{2R}$$

مقاومت پیچشی دایره توپر:

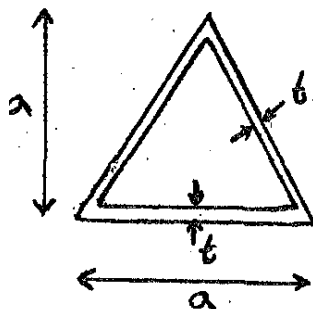
$$T = \tau_{\text{مجاز}} \times 2A_m t$$

مقاومت پیچشی جدارنازک بسته:

$$T = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{J}{t_{\text{max}}} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\sum P_i t_i^3}{t_{\text{max}}}$$

مقاومت پیچشی جدارنازک باز:

آزاد ۹۲



۵۲- اگر در مقطع جدار نازک نشان داده شده ابعاد و ضخامت مقطع ۲ برابر شود،

ظرفیت پیچشی مقطع چند برابر می شود؟

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$16 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

گزینه ۳

$$T = (2A_m t) \tau_{\text{مجاز}}$$

ظرفیت پیچشی مقطع برابر است با:

بنابراین اگر ابعاد دو برابر شود، مقدار A_m چهار برابر شده و مقدار t نیز دو برابر می شوند و ظرفیت پیچشی ۸ برابر می شود.

۵۱- عضوی به طول یک متر مطابق شکل تحمل کوپل پیچشی T قرار گرفته است. عضو از دو نیم استوانه با شعاع متوسط R و ضخامت t تشکیل شده است. دو نیم استوانه در طول عضو توسط جوش با تنش مجاز τ و ضخامت $\frac{t}{2}$ متصل گردیده است.

حداکثر کوپل پیچشی قابل تحمل توسط عضو کدام رابطه را برآورد؟



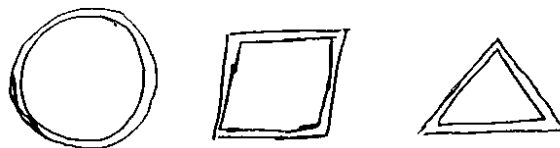
- (۱) $2\pi R^2 \cdot t \cdot \tau$
- (۲) $\frac{1}{2}\pi R^2 \cdot t \cdot \tau$
- (۳) $\pi R^2 \cdot t \cdot \tau$
- (۴) $\frac{1}{4}\pi R^2 \cdot t \cdot \tau$

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(\pi R^2)(\frac{t}{2})} \rightarrow T = \pi R^2 t \tau$$

ضخامت جوش ضخامت جوش

در جدارنازک بسته هر چه شکل مقطع به دایره نزدیکتر باشد مقدار تنش پیچشی کاهش و مقاومت پیچشی افزایش می یابد :

مثال: طول محیط هر سه مقطع یکسان است. مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است؟



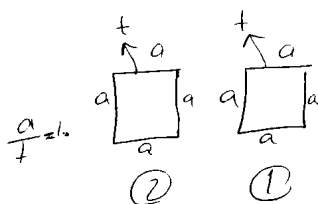
پاسخ:

$$T_{\text{دایره}} < T_{\text{مربع}} < T_{\text{مثلث}}$$

در جدارنازک باز مقدار تنش پیچشی و مقاومت پیچشی ربطی به شکل مقطع ندارد (تنها طول مقطع، P، و ضخامت مقطع، t، مهم است).



سوال: مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است (ضخامت جدار در هر سه یکسان است)؟
پاسخ: مقاومت هر سه یکسان است.



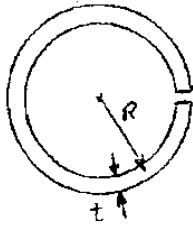
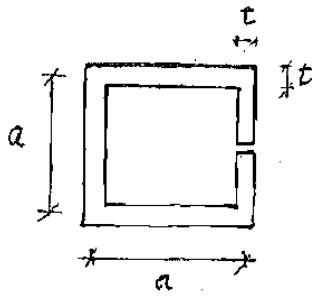
سوال: مقاومت پیچشی کدام مقطع بیشتر است؟
پاسخ:

$$T_1 = \frac{\tau (Pt^2)}{3} = \frac{\tau (4at^2)}{3} = \tau \left(\frac{40}{3} t^3 \right) = 13.33 t^3$$

$$T_2 = \tau (2A_m t) = \tau (2a^2 t) = \tau (200 t^3) = 200 t^3 \checkmark$$

نتیجه: مقاطع بسته مقاومت بالاتری دارند.

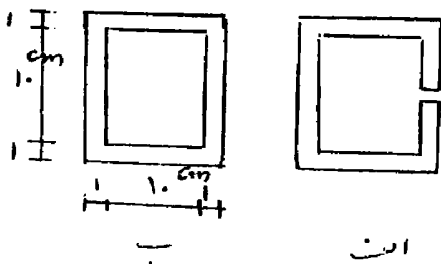
۵۲- مطلوبست تعیین نسبت $\frac{a}{R}$ برای آنکه ظرفیت پیچشی دو مقطع مقابل یکسان باشد:



- (۱) $\frac{a}{R} = \pi$
- (۲) $\frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{a}{R} = 2\pi$
- (۴) $\frac{a}{R} = \frac{2\pi}{2}$

$$\frac{1}{3}(4a)t^2 = \frac{1}{3}(2\pi R)t^2 \rightarrow \frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$$

۵۱- دو میله با مقطع جدار نازک کاملاً مشابه با تفاوت اینکه در گزینه الف شیار کوچکی وجود دارد، تحت گشتاور پیچشی قرار دارند. مقاومت پیچشی میله الف چند برابر میله ب است؟



- (۱) ۰٫۵۶
- (۲) ۵٫۵
- (۳) ۰٫۱۸
- (۴) ۱۶٫۶

تغش برشی ارجدار نازک باز $\Rightarrow \tau = \frac{3T}{Pt^2} \Rightarrow$ مقاومت $T = \frac{2Pt^2}{3}$

تغش برشی ارجدار نازک بسته $\Rightarrow \tau = \frac{T}{2A_m t} \Rightarrow$ مقاومت $T = 2\tau A_m t$

$$\Rightarrow \frac{T_{باز}}{T_{بسته}} = \frac{\frac{P}{4} \cdot \frac{4t^2}{3}}{2 \times 11 \times 11 \times \frac{1}{4}} = 0.0606$$

۳- میل‌های با مقطع دایره‌ای، به طول ۲ m و شعاع مقطع ۵ cm مفروض است. حداکثر چند رادیان می‌توان میله را پیچاند، تا به

نقطه تسلیم نرسد؟ تنش مجاز برشی $\tau_R = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ، مدول ارتجاعی $E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ و ضریب پواسون

۰٫۲۵ است.

$$\approx 1.54 \quad (2)$$

$$\approx 1.52 \quad (1)$$

$$\approx 1.55 \quad (4)$$

$$\approx 1.55 \quad (3)$$

گزینه ۴

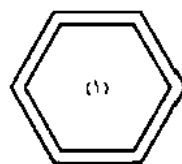
حداکثر مقدار پیچش مجاز (T_{all}) که می‌توان به مقطع وارد کرد برابر است با:

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad \rightarrow \quad \frac{T_{all} \times 5}{J} = 1000 \quad \rightarrow \quad T_{all} = 200J$$

حداکثر مقدار دوران پیچشی مقطع بستگی به T_{all} دارد:

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ} = \frac{T \times 200}{\left(\frac{2 \times 10^6}{2(1+0.25)}\right)J} = \frac{2.5T}{10^4 J} = \frac{2.5 \times 200J}{10^4 J} = 0.05 \text{ rad}$$

۵۰- اگر دو مقطع هم جنس و هم طول مطابق شکل، سختی پیچشی یکسانی داشته باشند، نسبت مقاومت پیچشی مقطع (۱) به مقطع (۲) کدام است (جنس مصالح یکسان است)؟



a, t_1



$2a, t_2$

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

نسبت مقاومت های پیچشی برابر است با:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau_0 \times 2A_{m1}t_1}{\tau_0 \times 2A_{m2}t_2} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2}$$

مساحت A_{m1} شامل شش مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a می‌باشد و بنابراین داریم:

$$\frac{A_{m1}}{A_{m2}} = \frac{6}{2^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{A_{m1}t_1}{A_{m2}t_2} = \frac{3}{2} \frac{t_1}{t_2}$$

نسبت t ها را با مساوی قرار دادن سختی مقاطع بدست می‌آید. با توجه به اینکه سختی پیچشی یکسان است، مقادیر J نیز باید یکسان باشد ($K = \frac{GJ}{L}$):

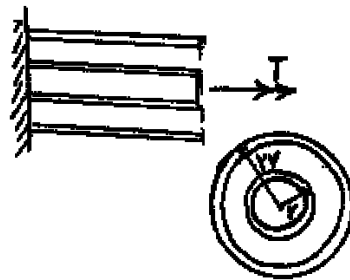
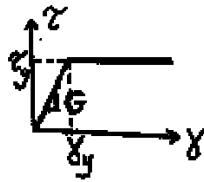
$$J_1 = J_2 \rightarrow \left(\frac{4A_m^2}{\rho}\right)_1 = \left(\frac{4A_m^2}{\rho}\right)_2$$

در رابطه فوق محیط هر دو مقطع یکسان است و بنابراین:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{2} \frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{3}$$

۳- مجموعه نشان داده شده از دو لوله جدار نازک هم مرکز تشکیل شده که در یک انتها توسط دیسک صلب به یکدیگر متصل شده‌اند به طوری که میزان زاویه پیچش در هر دو یکسان است و از طرف دیگر تحت کوئل پیچشی T قرار می‌گیرند. هر گاه ضخامت لوله‌ها ثابت t و طول مجموعه L فرض شود و مصالح در هر دو لوله الاستوپلاستیک در نظر گرفته شود و G مدول برشی و τ_y تنش برشی تسلیم باشند. T_y و ϕ_y در مجموعه که متناظر با رخداد اولین تسلیم باشد، کدام می‌باشند؟



$$T_y = 9\pi r^2 \tau_y \text{ و } \phi_y = \frac{L}{r} \frac{\tau_y}{G} \quad (1)$$

$$T_y = 12\pi r^2 \tau_y \text{ و } \phi_y = \frac{L}{2r} \frac{\tau_y}{G} \quad (2)$$

$$T_y = 9\pi r^2 \tau_y \text{ و } \phi_y = \frac{L}{2r} \frac{\tau_y}{G} \quad (3)$$

$$T_y = 12\pi r^2 \tau_y \text{ و } \phi_y = \frac{L}{r} \frac{\tau_y}{G} \quad (4)$$

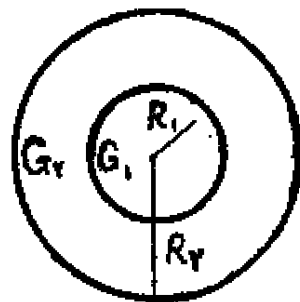
۶- مقطع میله مدور نشان داده در شکل از دو جنس مختلف تشکیل شده است به

طوری که $G_1 = 2G_2$ می‌باشد. نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ چقدر باشد تا مقطع مورد نظر

تحت اثر پیچش به طور بهینه طراحی شده باشد. (τ_w تنش برشی مجاز مصالح)

$$\text{جنس (1) } \tau_w = 2\tau_o$$

$$\text{جنس (2) } \tau_w = \tau_o$$



$$1/25 \quad (1)$$

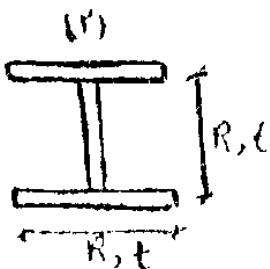
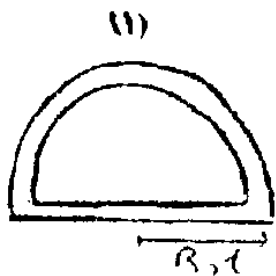
$$1/5 \quad (2)$$

$$1/25 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

۵۱- نسبت مقاومت پیچشی مقطع (۱) به مقاومت پیچشی مقطع (۲) کدام است؟ (جنس مصالح هر دو مقطع

یکسان و ضخامت تمام قسمت‌ها برابر t می‌باشد.) $\left(\frac{R}{t} = 10\right)$



$10 \pi (1)$

$5 \pi (1)$

$15 \pi (1)$

$2 \pi (2)$

مقاومت پیچشی مقطع ۱

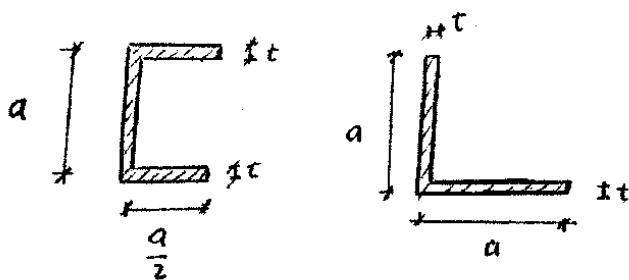
$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \Rightarrow T_1 = \tau \left(2 \frac{\pi R^2}{2} \times t \right) = \tau (\pi R^2 t)$$

مقاومت پیچشی مقطع ۲

$$\tau = \frac{T}{\frac{\sum L t^3}{3}} \Rightarrow T_2 = \tau (R t^3)$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi R}{t} = 10 \pi$$

۵۱- چه رابطه‌ای بین ظرفیت پیچش مقاطع جدار نازک داده شده، برقرار است؟



(۱) ظرفیت پیچشی هر دو مقطع یکسان است

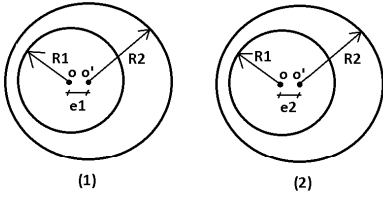
(۲) رابطه‌ای بین ظرفیت پیچشی دو مقطع وجود ندارد

(۳) ظرفیت پیچشی مقطع نبشی دو برابر مقطع ناودانی است

(۴) ظرفیت پیچشی مقطع ناودانی دو برابر مقطع نبشی است

گزینه ۱

اگر فاصله مراکز دواير داخلی و خارجی در ميل گردانه‌های جدار نازک زیر به ترتيب برابر e_1 و e_2 باشد مقاومت پیچشی میلگردان اول چند برابر میلگردان دوم است؟



$$\frac{R_2 - R_1 + e_1}{R_2 - R_1 + e_2} \quad (1)$$

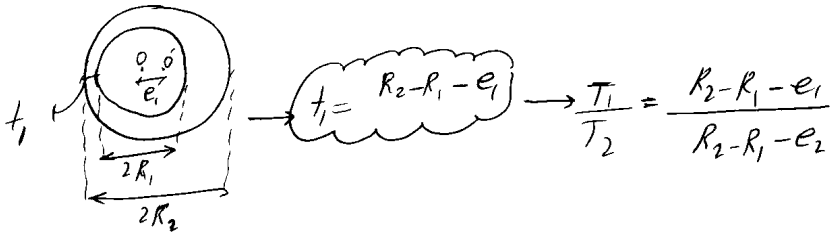
$$\frac{R_1 + R_2 + e_1}{R_1 + R_2 + e_2} \quad (2)$$

$$\frac{R_1 + R_2 - e_1}{R_1 + R_2 - e_2} \quad (3)$$

$$\frac{R_2 - R_1 - e_1}{R_2 - R_1 - e_2} \quad (4)$$

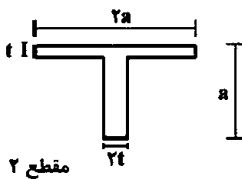
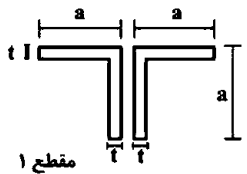
$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \rightarrow \begin{cases} T_1 = \tau (2A_m t_1) \\ T_2 = \tau (2A_m t_2) \end{cases} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

اقتضای صورت
صحت محصور در هر دو شکل
یکسان است $A_{m1} = A_{m2}$



۷- دو مقطع شماره یک و دو مطابق شکل به ترتیب تحت لنگرهای پیچشی T_1 و T_2 قرار می‌گیرند. نسبت لنگرها

را طوری تعیین کنید که در هر دو مقطع، زاویه چرخش در واحد طول آن‌ها یکسان باشد ($a > 10t$) ؟ $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$



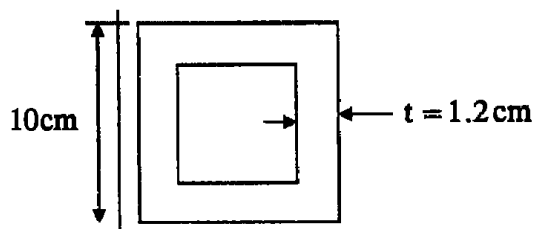
- ۰٫۳ (۱)
- ۰٫۴ (۲)
- ۰٫۵ (۳)
- ۰٫۶ (۴)

گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{T_1 L}{G J_1} = \frac{T_1 L}{G \left(4 \times \frac{at^3}{3}\right)} = \frac{3 T_1 L}{4 Gat^3} \\ \varphi_2 &= \frac{T_2 L}{G J_2} = \frac{T_2 L}{G \left(\frac{2at^3}{3} + \frac{a(2t)^3}{3}\right)} = \frac{3 T_2 L}{10 Gat^3} \end{aligned} \right\} \varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \frac{3T_1}{4} = \frac{3T_2}{10} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 0.4$$

تمرین: آزاد ۹۳

۵۷- ظرفیت پیچشی مقطع زیر کدام است؟ $\tau_a = 960 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$



691200 kgcm (۱)

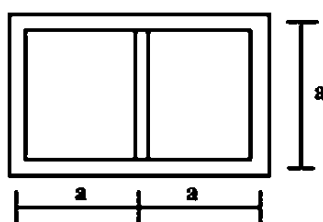
345600 kgcm (۲)

1382400 kgcm (۳)

172800 kgcm (۴)

دکتری ۹۶

۶- مقطع جدار نازک مطابق شکل تحت تأثیر ممان پیچشی T قرار می‌گیرد. اگر ضخامت تمام جدارها برابر t باشد، تنش برشی در جداره‌های داخلی و خارجی به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟



(۱) صفر، صفر

(۲) $\frac{T}{4ta^2}$ ، صفر(۳) صفر، $\frac{T}{4ta^2}$ (۴) $\frac{T}{4ta^2}$ ، $\frac{T}{4ta^2}$

گزینه ۳

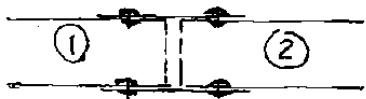
به علت تقارن در جدار داخلی تنش برشی ناشی از پیچش صفر خواهد بود و کل پیچش را جدارهای پیرامونی تحمل خواهند کرد. بنابراین عملاً یک مقطع باکس (جدارنازک بسته) داریم که تنش برشی در جدارهای پیرامونی برابر است با:

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2 \times (2a^2)t} = \frac{T}{4ta^2}$$

۱۲-۶- اتصالات تحت اثر پیچش

سراسری ۸۴

۴۴- انتهای دو لوله ۱ و ۲ به قطر خارجی ۸۰ cm مطابق شکل روبرو در داخل لوله‌ای به قطر داخلی ۸۰ cm قرار گرفته‌اند، هر کدام از لوله‌های ۱ و ۲ با ۲۰ عدد پیچ به قطر ۲ cm بهم وصل شده‌اند. اگر لنگر پیچشی ۲۰۰ Nm به مجموعه وارد شود تنش برشی در پیچ‌ها چقدر است؟



- ۷۹۶ (۱)
- ۳۹۸ (۲)
- ۱۹۹ (۳)
- ۹۹.۵ (۴)

لنگر پیچشی که هر دو پیچ یک کار را می‌کنند

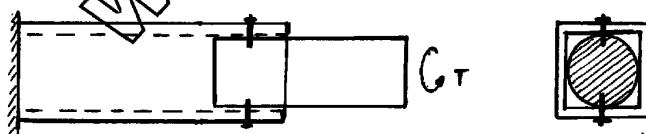
تنش برشی در پیچ

$$T_i = f \times R \Rightarrow T = 20 \times f \times R \Rightarrow f = \frac{T}{20R} = \frac{20 \times 10^5}{20 \times 40}$$

$$\tau = \frac{f}{A} = \frac{20 \times 10^5}{20 \times 40 \times (\pi \times 1^2)} = 796 \text{ g/cm}^2$$

سراسری ۹۱

۵۴- یک مقطع توپر دایره‌ای به شعاع R توسط دو پیچ به یک مقطع توخالی قوطی شکل متصل شده است. در صورتی که تنش مجاز پیچ‌ها τ باشد، قطر پیچ‌ها به طوری که کوپل پیچشی T را بتوان از مقطع دایره‌ای به مقطع توخالی منتقل کرد، کدام رابطه زیر است؟



- (۱) $D = \sqrt{\frac{4T}{\pi \cdot \tau \cdot R}}$
- (۲) $D = \sqrt{\frac{T}{4\pi \cdot \tau \cdot R}}$
- (۳) $D = \sqrt{\frac{2T}{\pi \cdot \tau \cdot R}}$
- (۴) $D = \sqrt{\frac{T}{2\pi \cdot \tau \cdot R}}$

نیروی برشی هر پیچ

$$T = F \times (2R)$$

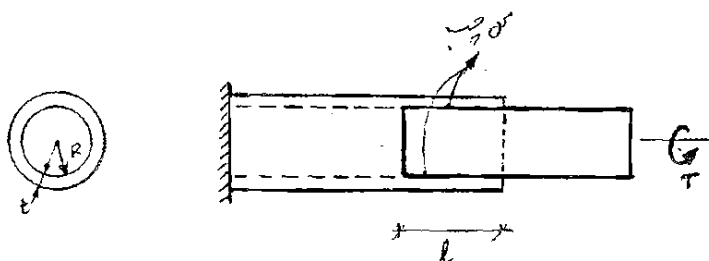
$$F = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \tau$$

$$T = \frac{\pi D^2}{4} \tau \times (2R)$$

$$D = \sqrt{\frac{2T}{\pi \tau R}}$$

سراسری ۸۶

۵۵- یک مقطع توپر دایره‌ای با شعاع R توسط چسب با تنش برشی مجاز τ در داخل مقطع توخالی در طول l متصل شده است. مطلوبست محاسبه طول l بطوریکه لنگر پیچشی T را بتوان از مقطع توپر به مقطع توخالی منتقل کرد.



$$l = \frac{T}{\pi R^2 \tau} \quad (1)$$

$$l = \frac{T}{2\pi R \tau} \quad (2)$$

$$l = \frac{T}{2\pi R^2 \tau} \quad (3)$$

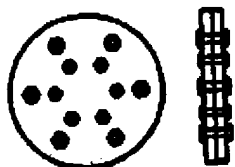
$$l = \frac{T}{\pi R \tau} \quad (4)$$

$$T = \left[\left(\frac{2\pi R^2 \tau}{l} \right) \times R \right] \times R = \left[(2\pi R^2 \tau) \times R \right] \times R = 2\pi R^2 l \tau \Rightarrow l = \frac{T}{2\pi R^2 \tau}$$

آزاد ۸۸

۶۹- در اتصال فلنجی زیر دو نوع پیچ با تنشهای مجاز σ_1 و σ_2 در فواصل R_1 و R_2 از مرکز اتصال قرار دارند. برای اینک این اتصال فلنجی

حداکثر لنگر پیچشی را منتقل کند نسبت $\frac{R_1}{R_2}$ چقدر باید باشد؟ (مدول برشی پیچ‌ها به ترتیب برابر G_1 و G_2 است).



$$\frac{G_1 \sigma_2}{G_2 \sigma_1} \quad (1)$$

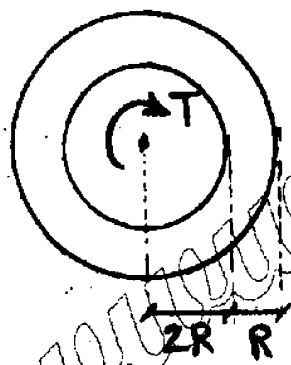
$$\frac{G_2 \sigma_1}{G_1 \sigma_2} \quad (2)$$

$$\frac{G_2 \sigma_2}{G_1 \sigma_1} \quad (3)$$

$$\frac{G_1 \sigma_1}{G_2 \sigma_2} \quad (4)$$

آزاد ۹۱

۴۲- مقطع توخالی نشان داده شده تحت پیچش قرار دارد. اگر کرنش برشی در حدار داخلی مقطع برابر با ۰/۰۲ رادیان باشد، تنش برشی حداکثر چند kg/cm^2 می‌باشد؟ ($G = 10^5 \text{ kg/cm}^2$)



$$2000 \quad (2)$$

$$1000 \quad (1)$$

$$4000 \quad (4)$$

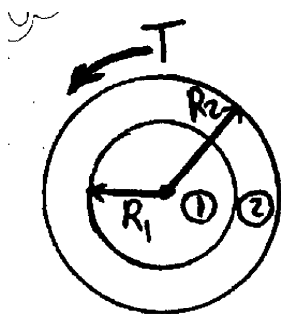
$$3000 \quad (3)$$

گزینه ۳

$$\tau_{inner} = 0.02 \times G = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{\tau_{out}}{\tau_{inner}} = \frac{3R}{2R} \rightarrow \tau_{out} = 3000 \frac{kg}{cm^2}$$

آزاد ۹۱



۴۸- در شکل زیر نسبت $\frac{G_1}{G_2}$ چقدر باشد تا تنش برشی حداکثر در هر دو مصالح با هم برابر شود؟ ($R_2 = 3R_1$)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

گزینه ۳

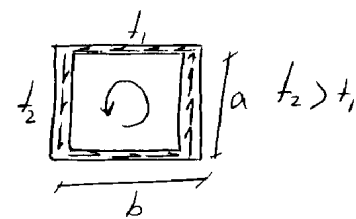
$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2 G_2}{R_1 G_1} = 1 \rightarrow \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_2}{R_1} = 3$$

جدار نازک با ضخامت کم نسبت :

$\tau_{max} = \frac{T}{2A_m t_1}$

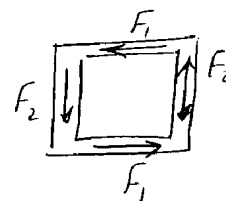
$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$

تنش در جدار نازک تر بیشتر است ✓



سؤال: اگر تنش که را بگیرد نیروی F معادل کسب مقدار F_1 و F_2 ؟

$F_1 = \tau_1 \times (b t_1)$



سؤال: سهم بال که را وقتی از تحمل است سهم ؟

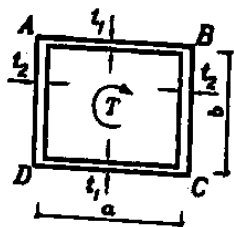
$F_1 \times a = \tau_1 (b t_1) a$

$= \left(\frac{T}{2A_m t_1} \right) (b t_1) a = \frac{T}{2} (ab) = \frac{J}{2}$

یا رآورد: در جدار نازک به سهم اعضا را نمی توان به نسبت J بدست آورد چون اصول J بر قسمت که در مختلف داریم بگذرد آن برابر

کل مقطع است $(J = \frac{4A_m^2 t}{p})$

تمرین: آزاد ۸۶



۱۵- در مقطع فوطی شکل زیر سهم وجه های افقی مقطع در تحمل پیچش چند برابر سهم وجه های قائم مقطع می باشد؟

۱) سهم وجه های افقی و قائم در تحمل پیچش برابر است.

$\frac{a t_1}{b t_2}$

$\frac{t_1}{t_2}$

$\frac{a}{b}$

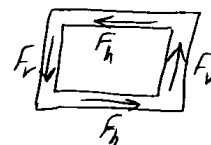
تنش در جدار افقی $\rightarrow \tau_h = \frac{T}{2A_m t_1} \rightarrow F_h = \tau_h \times (a t_1) = \frac{T a}{2A_m}$

تنش در جدار قائم $\rightarrow \tau_v = \frac{T}{2A_m t_2} \rightarrow F_v = \tau_v \times (b t_2) = \frac{T b}{2A_m}$

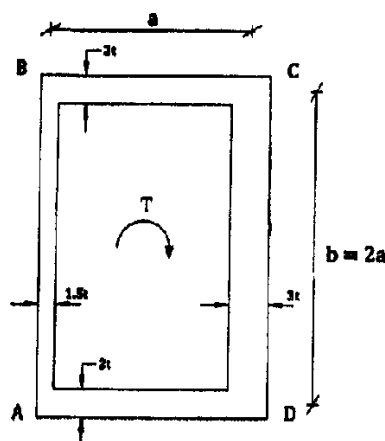
سهم افقی از T $= F_h \times b = \frac{T a b}{2A_m}$

سهم قائم از T $= F_v \times a = \frac{T a b}{2A_m}$

\rightarrow سهم یک برابری است

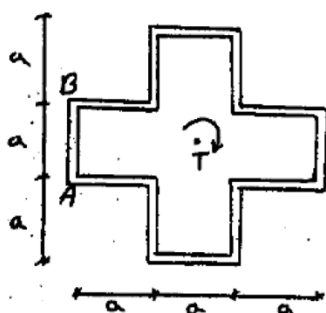


۵۴- مقطع قوطی مطابق شکل زیر تحت اثر کوپل پیچشی T قرار گرفته است. چند درصد از لنگر پیچشی توسط وجه AB تحمل می‌شود؟ (ابعاد مرکز به مرکز هستند و $t \ll a, b$)



- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۳۰
(۴) ۱۵

۵۰- چند درصد از لنگر پیچشی اعمال شده توسط قطعه AB تحمل می‌شود؟ (ضخامت تمام اجزاء مقطع یکسان می‌باشد)



- (۱) ۱۵%
(۲) ۲۵%

- (۱) ۱۰%
(۲) ۲۰%

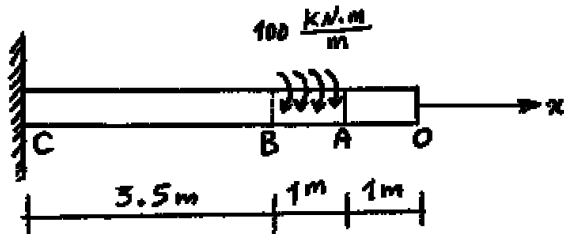
گزینه ۲

- ۱- مقدار تنش برشی را در قطعه AB بدست می‌آوریم
- ۲- نیروی برشی در قطعه AB را بر اساس تنش بدست آمده محاسبه می‌کنیم
- ۳- لنگر ناشی از نیروی برشی بدست آمده را حول مرکز بدست می‌آوریم:

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(5a^2)t} \quad \rightarrow F_{AB} = \tau \times (at) = \frac{T}{10a} \quad \rightarrow T_{AB} = F_{AB} \times (1.5a) = \frac{15T}{100}$$

سراسری ۹۳- دکتری

۲- یک شفت با قطر خارجی 40 mm تحت یک لنگر پیچشی یکنواخت به مقدار $100 \frac{\text{kN.m}}{\text{m}}$ مؤثر در روی قسمت AB در شکل مفروض است. اندازه دو کمیت زیر کدام است؟ ($G = 80 \times 10^9 \text{ Pa}$)
 ماکزیم تنش برشی τ_{\max} بر حسب $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ، زاویه چرخش «O» نسبت به «C» بر حسب رادیان



$$\phi = 418/3, \tau_{\max} = 63 \times 10^9 \quad (1)$$

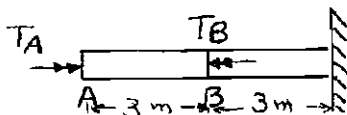
$$\phi = 318/3, \tau_{\max} = 43 \times 10^9 \quad (2)$$

$$\phi = 418/3, \tau_{\max} = 43 \times 10^9 \quad (3)$$

$$\phi = 318/3, \tau_{\max} = 63 \times 10^9 \quad (4)$$

سراسری ۸۲

۳۶- میلۀ فولادی با مقطع دایره ای به قطر 60 mm مطابق شکل تحت لنگرهای پیچشی در نقاط A و B قرار گرفته است. لنگر پیچشی اعمال شده در نقطه B برابر است با 8π کیلونیوتن متر. اگر دوران مقطع B صفر باشد دوران مقطع A چقدر است؟ $G = 8 \times 10^4 \text{ MPa}$



- ۱) $0,494\text{ Rad}$
- ۲) $0,538\text{ Rad}$
- ۳) $0,672\text{ Rad}$
- ۴) $0,741\text{ Rad}$

$$\Delta_B = 0 \rightarrow F_{BC} = 0 \rightarrow T_A = T_B = 8\pi \times 10^3$$

مانند نیروی محوری عمل می کنیم

$$\phi_A = \frac{T_A L}{GJ} = \frac{8\pi \times 3 \times 10^3}{8 \times 10^{10} \times \left(\frac{\pi}{2} \times 0.03\right)^4} = 0.741 \text{ rad}$$

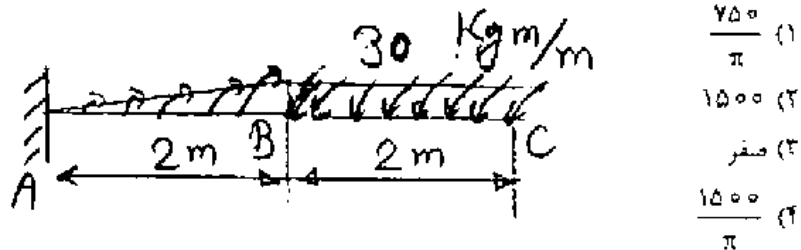
$$J = \frac{\pi}{2} \times 0.03^4$$

۶۲- نیندای به قطر 4 cm زیر اثر لنگر بیجشی مطابق شکل روبه‌رو قرار گرفته است.

تنش برشی ماکزیمم بر حسب $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ در آن چندر است؟ لنگر بیجشی در نیمه‌ی

سمت راست با شدت ثابت $30 \frac{\text{kgm}}{\text{m}}$ و در نیمه سمت چپ شدت آن به طور خطی

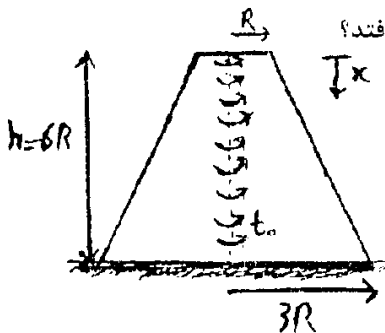
از $30 \frac{\text{kgm}}{\text{m}}$ به صفر می‌رسد.



آزاد ۹۰

۵۰- سازه نشان داده شده که دارای مقطع مدور توپر غیرمنشوری می‌باشد تحت اثر لنگر بیجشی گسترده

یکنواخت به شدت t_0 قرار گرفته است تنش برشی حداکثر در کجا اتفاق می‌افتد؟



$$x = 3R \quad (2)$$

$$x = 6R \quad (4)$$

$$x = \frac{2}{3}R \quad (1)$$

$$x = \frac{3}{2}R \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad \text{مقدار } T \text{ در ارتفاع } r \text{ برابر است با:} \quad (50)$$

$$\tau = \frac{T r}{J} = \frac{T r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2T}{\pi r^3} \quad \text{مقدار تنش برشی } \tau \text{ برابر است با:}$$

(ارتفاع r در طول استوانه تغییر است)

$$= \frac{2 t_0 \pi r}{\pi (R + \frac{r}{3})^3} \quad \text{در برابر } r = R + \frac{r}{3} \text{ است}$$

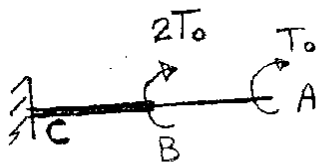
پس بدست آوریم حداکثر تنش از معادله بدست آمده مشتق می‌گیریم:

$$\tau = \frac{2 t_0 \pi (R + \frac{r}{3})^3 - 3 \times \frac{1}{3} \times \pi (R + \frac{r}{3})^2 \times 2 t_0 \pi}{[\pi (R + \frac{r}{3})^3]^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3R}{2}$$

تمرین: سراسری ۸۶

۵۲- در شکل روبرو AB و BC دارای مقطع دایره به قطر D و ۲D می‌باشند: نسبت تنش‌های برشی ماکزیمم در قسمت AB به قسمت BC

چقدر است؟ $\frac{(\tau_{AB})_{\max}}{(\tau_{BC})_{\max}}$



۱ (۱)

۲ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۳)

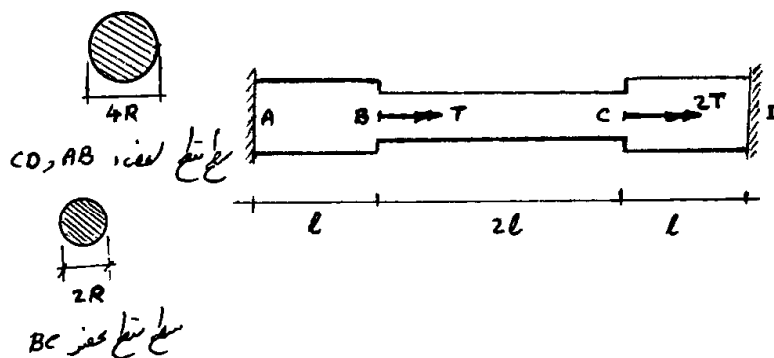
$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۵)

$\frac{1}{2}$ (۶)

$$\tau_{AB} = \frac{T_0 R}{\frac{\pi}{2} R^4} \quad \tau_{BC} = \frac{3T_0 (2R)}{\frac{\pi}{2} (2R)^4} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau_{AB}}{\tau_{BC}} = \frac{8}{3}$$

۵۰- عضو زیر، با مقطع دایره‌ای متغیر مطابق شکل تحت دو کوپل پیچشی متمرکز T و $2T$ در نقاط B و C قرار گرفته است. عکس العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و D کدام است؟



$$T_A = \frac{27}{34}T, T_D = \frac{25}{34}T \quad (۲)$$

$$T_A = \frac{25}{34}T, T_D = \frac{67}{34}T \quad (۱)$$

$$T_A = \frac{65}{34}T, T_D = \frac{27}{34}T \quad (۴)$$

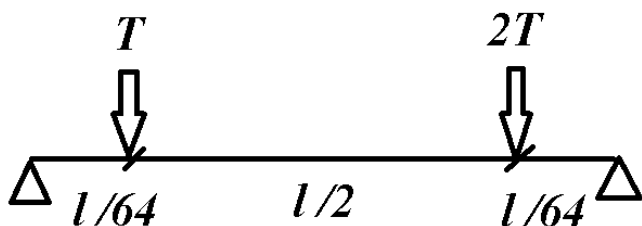
$$T_A = \frac{67}{34}T, T_D = \frac{25}{34}T \quad (۳)$$

گزینه ۱

تکیه‌گاه A را حذف کرده به روش نیرو آنرا بدست می‌آوریم. تغییر مکان نقطه A را محاسبه و برابر صفر قرار می‌دهیم. اگر ممان پیچشی مقطع BC برابر J باشد، ممان پیچشی مقطع AB برابر $16J$ خواهد بود.

$$\frac{T_A L}{16GJ} + \frac{(T_A - T)2L}{GJ} + \frac{(T_A - 3T)L}{16GJ} = 0 \rightarrow T_A = \frac{35}{34}T$$

$$\rightarrow T_D = 3T - \frac{35}{34}T = \frac{67}{34}T$$

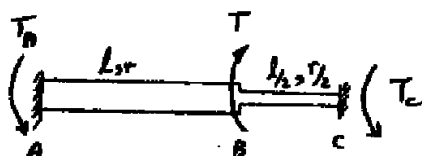


$$T_D = \frac{T \frac{l}{64} + 2T \times \frac{33l}{64}}{\frac{34l}{64}} = \frac{67}{34}T$$

سراسری ۹۱- دکتری

۵- دو میله هم جنس با مقطع دایره که طول و شعاع مقطع آنها روی شکل مشخص شده است به همدیگر جوش داده شده‌اند و به صورت گیردار به نقاط A و B متصل گردیده‌اند. اگر مجموعه در نقطه B توسط لنگر پیچشی T بارگذاری شود، نسبت

عکس‌عمل‌های تکیه‌گاهی $\frac{T_A}{T_C}$ چقدر است؟

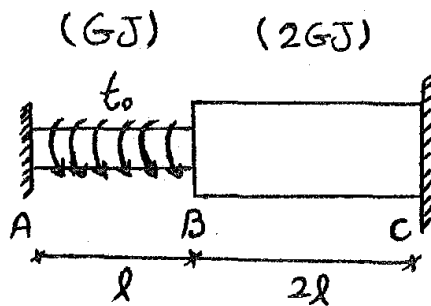


۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۸ (۴)



۵۰- در سازه نشان داده شده لنگر پیچش گسترده یکنواخت به شدت t_0 به قسمت AB اعمال شده است زاویه پیچش در B کدام است؟ (صلبیت پیچشی عضو BC دو برابر AB می باشد)

$$\frac{t_0 l^2}{2GJ} \quad (۲)$$

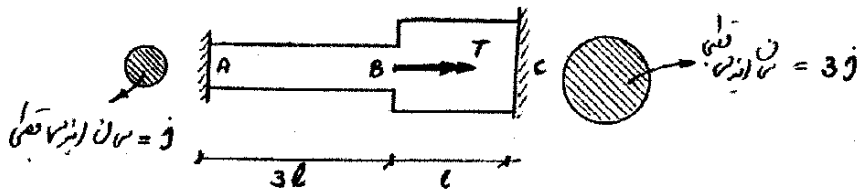
$$\frac{t_0 l^2}{4GJ} \quad (۱)$$

$$\frac{2t_0 l^2}{GJ} \quad (۴)$$

$$\frac{t_0 l^2}{GJ} \quad (۳)$$

سراسری ۸۹

۵۲- عضو با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کوبل پیچشی T در نقطه B قرار دارد. مطلوبست تعیین عکس العمل های تکیه گاهی در نقاط A و C.



$$T_A = \frac{2T}{10} \text{ و } T_C = \frac{7T}{10} \quad (۴)$$

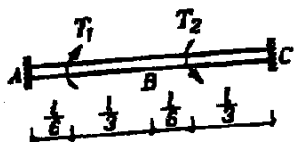
$$T_A = \frac{9T}{10} \text{ و } T_C = \frac{T}{10} \quad (۱)$$

$$T_A = \frac{7T}{10} \text{ و } T_C = \frac{2T}{10} \quad (۴)$$

$$T_A = \frac{T}{10} \text{ و } T_C = \frac{9T}{10} \quad (۳)$$

آزاد ۸۸

۵۱- در تیر زیر نسبت $\frac{T_1}{T_2}$ چقدر باشد تا پیچش وسط تیر صفر شود؟ $(GJ = \text{Const})$



$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

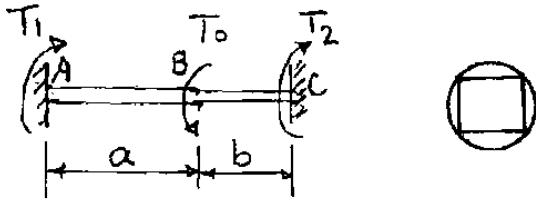
$$2 \quad (۲)$$

$$3 \quad (۱)$$

گزینه ۲

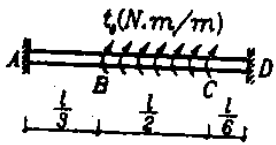
۴۵- در شکل روبه‌رو قسمت AB با مقطع دایره به شعاع R و قسمت BC با مقطع مربع به شعاع $a = R\sqrt{2}$ می‌باشد. برای اینکه $T_1 = T_2$

باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟ ($J_c = 0.141 a^4$ برای مربع)



- ۲,۷۸۵ (۱)
- ۱,۳۹ (۲)
- ۱ (۳)
- ۰,۳۵۹ (۴)

۴۸- در تیر زیر زاویه پیچش وسط تیر چقدر است؟ ($GJ = \text{const}$)

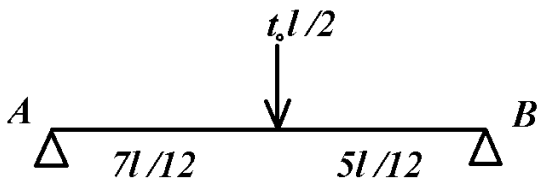


$$\frac{17t_0 l^2}{144GJ} \quad (1)$$

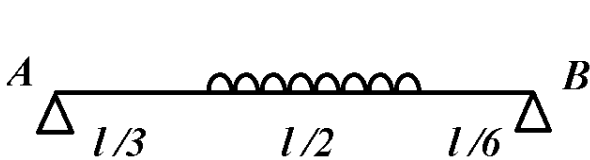
$$\frac{13t_0 l^2}{144GJ} \quad (2)$$

$$\frac{7t_0 l^2}{144GJ} \quad (3)$$

$$\frac{11t_0 l^2}{144GJ} \quad (4)$$

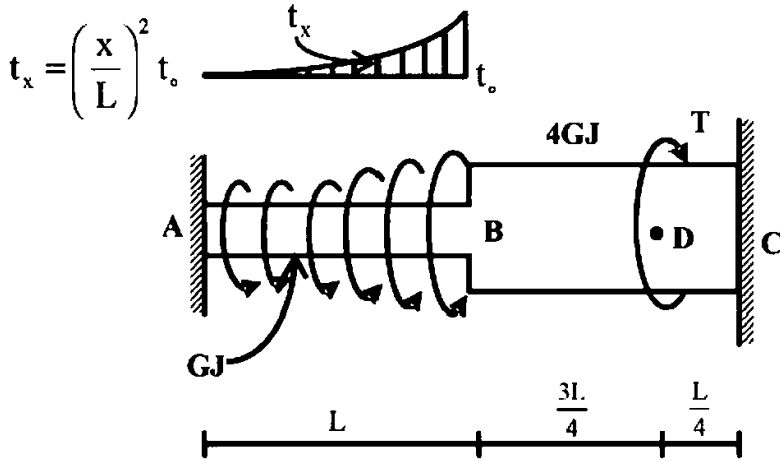


$$T_A = \frac{5}{12} \times \frac{t_0 L}{2} = \frac{5t_0 L}{24} \rightarrow T_B = \frac{7t_0 L}{24}$$



$$\varphi = \frac{1}{GJ} \left(\frac{7t_0 L}{24} \times \frac{L}{2} - \frac{t_0 L}{3} \times \frac{L}{6} \right) = \frac{13 t_0 L^2}{144 GJ}$$

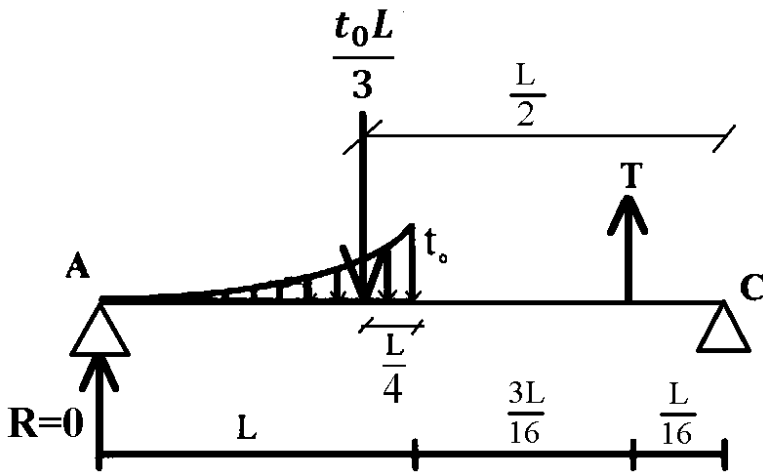
۴- عضو ABC تحت بارگذاری پیچشی مطابق شکل قرار می‌گیرد. مقدار T را طوری تعیین کنید که عکس‌العمل A صفر شود؟



- (۱) $\frac{Lt_0}{3}$
- (۲) $\frac{2Lt_0}{3}$
- (۳) $\frac{Lt_0}{4}$
- (۴) $\frac{Lt_0}{5}$

گزینه؟

$$\sum M_C = 0 \rightarrow \frac{t_0 L}{3} \times \frac{L}{2} - T \times \frac{L}{16} = 0 \rightarrow T = \frac{8}{3} t_0 L$$

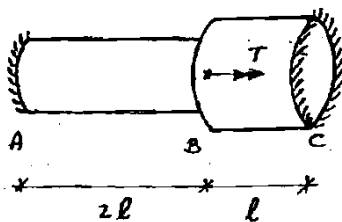


تمرین: سراسری ۸۵

۵۰- عضوی با مقطع دایروی مطابق شکل تحت کویل پیچشی T در مقطع B می‌باشد. مطلوبست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در نقاط A و C (نقاط A و C بصورت گیردار کامل می‌باشند)

J=ممان اینرسی قطبی مقطع در ناحیه AB

۴J=ممان اینرسی قطبی در ناحیه BC

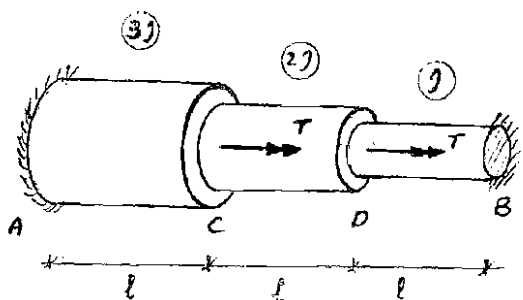


- (۱) $T_A = \frac{T}{9}, T_B = \frac{8T}{9}$
- (۲) $T_A = \frac{6T}{9}, T_B = \frac{T}{9}$
- (۳) $T_A = \frac{8T}{9}, T_B = \frac{T}{9}$
- (۴) $T_A = \frac{T}{9}, T_B = \frac{6T}{9}$

گزینه ۱

تمرین: سراسری ۸۶

۵۴- عضو شکل مقابل با مقطع دایره‌ای پله‌ای تحت اثر دو لنگر پیچشی T در نقاط C و D قرار گرفته است. نقاط A و B بصورت گیردار می‌باشند. مطلوبست عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نقاط A و B:



$$T_A = \frac{5}{9}T, \quad T_B = \frac{9}{9}T \quad (1)$$

$$T_A = \frac{9}{9}T, \quad T_B = \frac{5}{9}T \quad (2)$$

$$T_A = \frac{7}{11}T, \quad T_B = \frac{15}{11}T \quad (3)$$

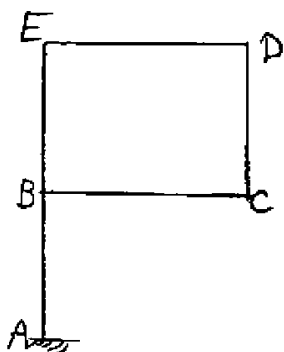
$$T_A = \frac{15}{11}T, \quad T_B = \frac{7}{11}T \quad (4)$$

گزینه ۴

سراسری ۸۸

۶۱- صفحه BCDE به میله AE که دارای مقطع دایره توپر به شعاع ۵ cm است کاملاً متصل است و عمود بر آن صفحه یاد می‌شود. به طوری که نیروی وارده صد کیلوگرم بر هر متر مربع است. مقدار تنش برشی ماکزیمم حاصل از فقط پیچش در

AB بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ برابر است با:

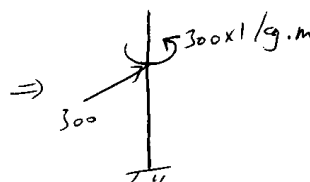
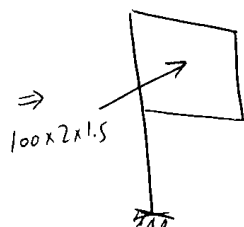
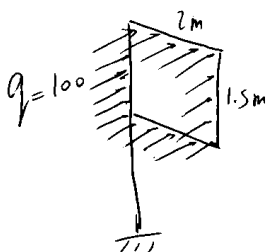


$$\frac{480}{\pi} \quad (1)$$

$$960\pi \quad (2)$$

$$48\pi \quad (3)$$

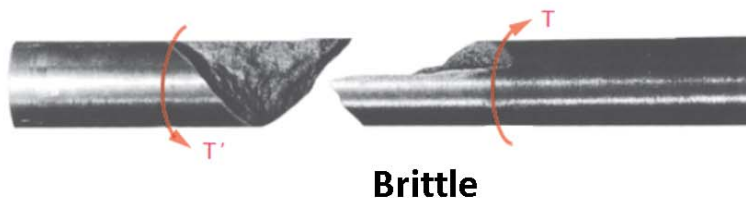
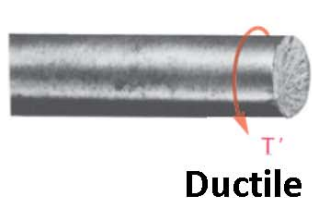
$$\frac{960}{\pi} \quad (4)$$



$$\tau = \frac{(30000) \times 5}{\frac{\pi}{2} \times 5^4} = \frac{480}{\pi}$$

مواد شکل پذیر در پیچش در صفحه عمود بر امتداد خود خراب می‌شوند.

مواد ترد در پیچش در صفحه ای که با محور طولی زاویه ۴۵ درجه می‌سازد خراب می‌شوند و در کشش عمود بر امتداد خود خراب می‌شوند.

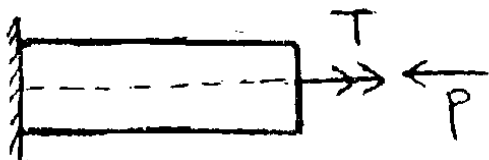


۴- کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

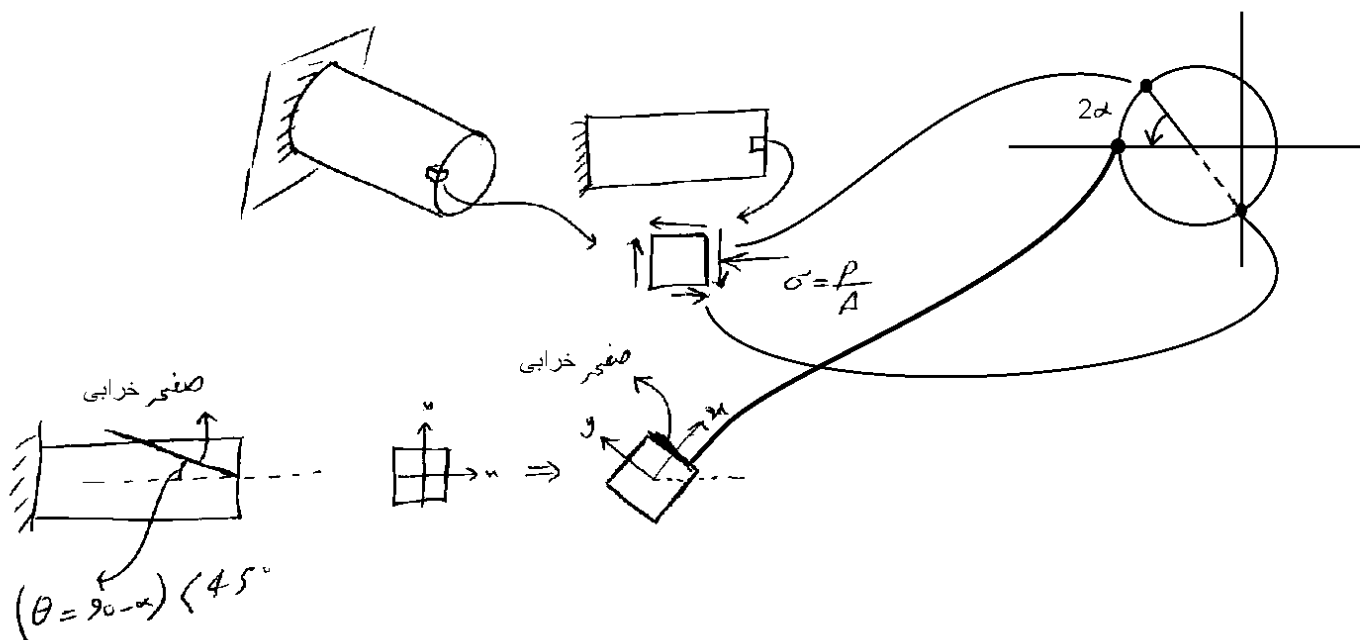
- (۱) میله‌ای از مصالح ترد در پیچش خالص در مقطعی با شیب 45° نسبت به محور طولی و در کشش در مقطعی عمود بر محور طولی دچار گسیختگی می‌گردد.
- (۲) میله‌ای از مصالح نرم در کشش در مقطعی عمود بر محور میله و در پیچش خالص در مقطعی با شیب 45° نسبت به محور طولی دچار گسیختگی می‌گردد.
- (۳) میله‌های ساخته شده از مصالح نرم در کشش تحت زاویه 60° نسبت به محور طولی و در پیچش در مقطعی عمود بر محور طولی گسیخته می‌گردند.
- (۴) هیچکدام از موارد بالا.

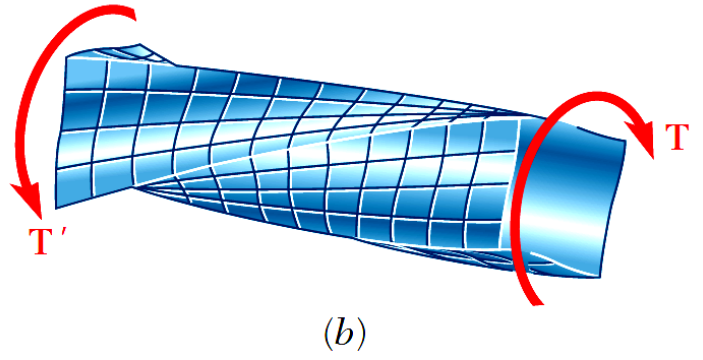
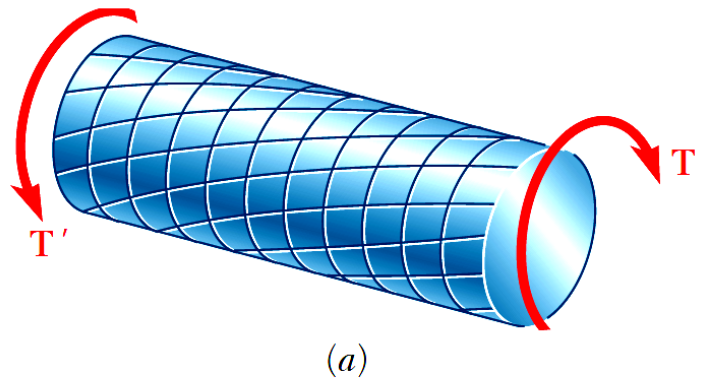
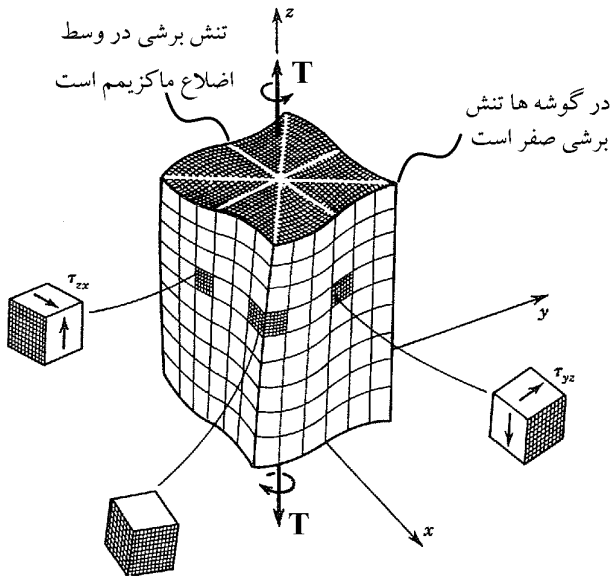
آزاد ۹۰

۴۹- تیر نشان داده شده که از مصالح ترد چدنی تشکیل شده است و دارای مقطعی مدور می‌باشد تحت لنگر پیچشی T و نیروی محوری P قرار گرفته است زاویه شکست میله نسبت به محور آن کدام است؟



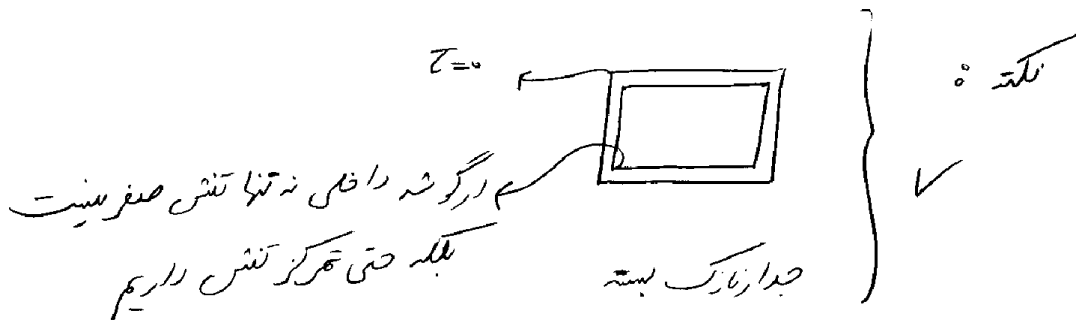
- (۱) 45° درجه در جهت عقربه‌های ساعت
- (۲) کمتر از 45° درجه در جهت عقربه‌های ساعت
- (۳) بیشتر از 45° درجه در جهت عقربه‌های ساعت
- (۴) کمتر از 45° درجه در جهت عقربه‌های ساعت

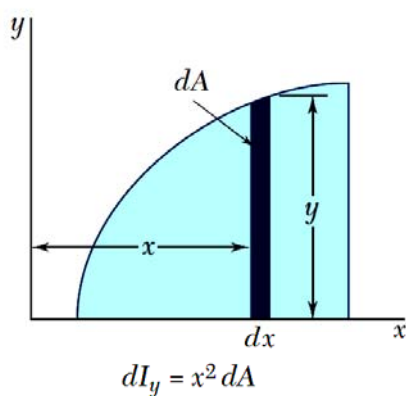
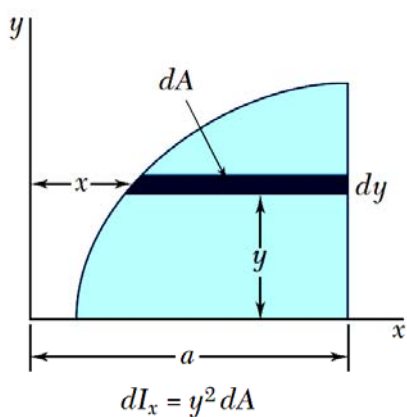
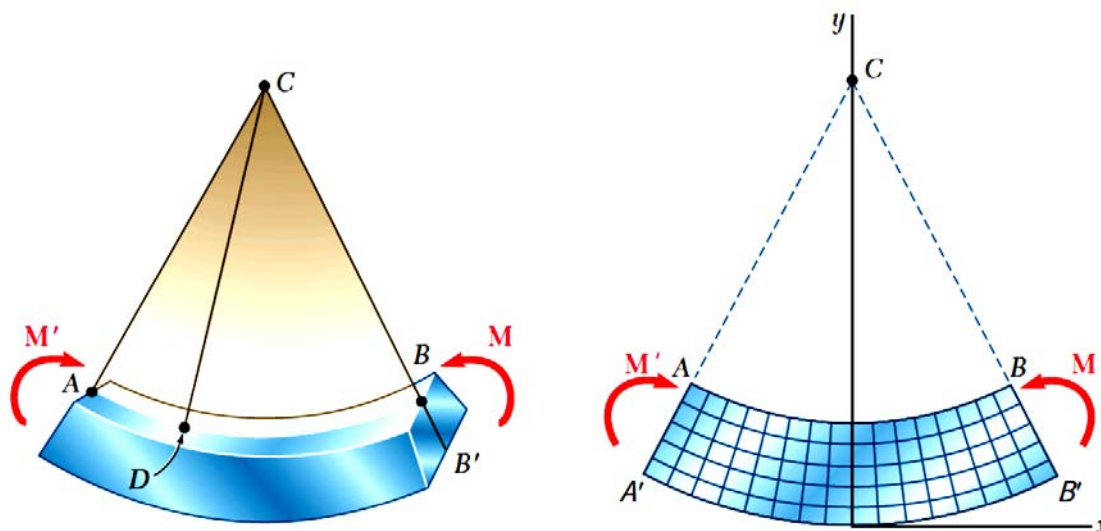




-مقاطع پس از پیچش مسطح باقی نمی ماند و اگر در مقابل تابیدگی مقید شده باشند علاوه بر تنش های برشی، تنش های طولی نیز خواهیم داشت.

-تنش های برشی در گوشه های خارجی صفر است
-تنش برشی ماکزیمم معمولاً در وسط اضلاع اتفاق می افتد





	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$
	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
	$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$

مفهوم ممان اینرسی

$$I_x = \int y^2 dA$$

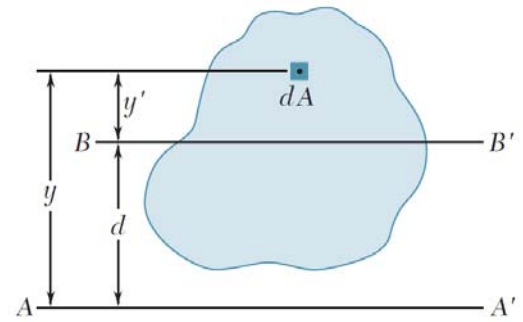
$$I_y = \int x^2 dA$$

قضیه محورهای موازی؟

$$I_{BB'} = \int (y')^2 dA$$

$$I_{AA'} = \int (y)^2 dA$$

$$I_{AA'} = I_{BB'} + A(d)^2$$

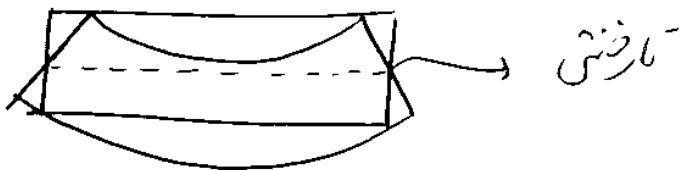


ممان اینرسی مقاطع جدار نازک؟

ممان اینرسی مستطیل مایل؟

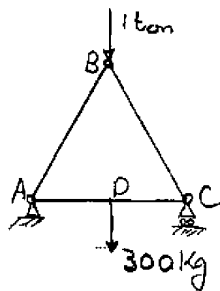
تعریف خمش خالص؟

تار خنثی؟



سراسری ۸۸

۶۵- در شکل روبه‌رو هر سه میله به مقطع مربع به طول ضلع ۶ cm می‌باشند. جنس هر سه میله از فولاد و طول هر کدام ۴ متر است. تنش خمشی در مقطع D در وسط ضلع AC چقدر است؟ (بر حسب کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع)

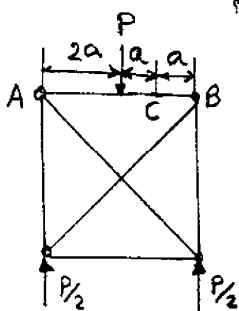


- ± ۸۳۳ (۱)
- ± ۵۵۵ (۲)
- ± ۳۶۱۱ (۳)
- ± ۱۲۵۰ (۴)

$$M_{max} = \frac{300 \times 400}{4} = 30000 \text{ kg.cm} \Rightarrow \sigma = \frac{6M}{a^3} = \frac{6 \times 30000}{6^3} = 833.33$$

سراسری ۸۷

۶۱- در خرابای شکل روبه‌رو میله AB به مقطع مربع و به طول ضلع b است. تنش خمشی در نقطه C چقدر است؟

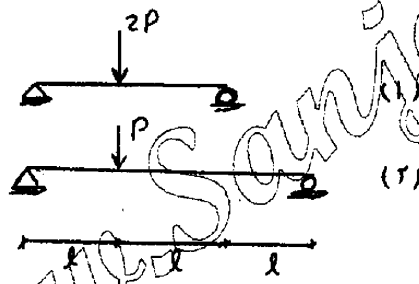
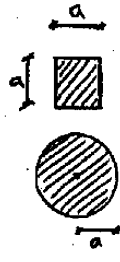


- $\frac{3Pa}{b^3}$ (۱)
- $\frac{P}{b^3}$ (۲)
- $\frac{3Pa}{2b^3}$ (۳)
- $\frac{P}{2b^3}$ (۴)

$$M_C = \frac{P}{2} \times a = \frac{Pa}{2} \rightarrow \sigma = \frac{6M}{b^3} = \frac{3Pa}{b^3}$$

AB دو سر مفصل است بنابراین جدال کنیم

۵۵- اگر تنش خمشی حداکثر در تیر شماره ۱ برابر با 60 kg/cm^2 باشد آن گاه تنش خمشی حداکثر در تیر شماره ۲ چند kg/cm^2 می باشد؟



- (۱) $\frac{80}{3\pi}$
- (۲) $\frac{20}{\pi}$
- (۳) $\frac{40}{3\pi}$
- (۴) $\frac{70}{2\pi}$

گزینه ۱

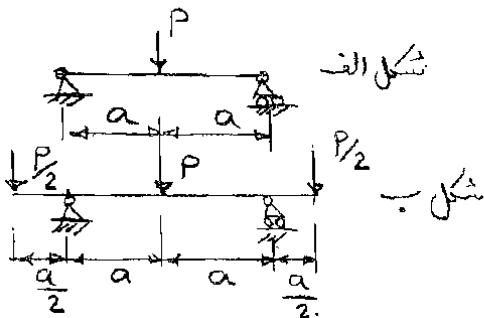
$$\sigma_1 = 6 \frac{\left(\frac{(2P)(2L)}{4}\right)}{a^3} = 60 \rightarrow \frac{PL}{a^3} = 10$$

با توجه به اینکه مقدار لنگر حداکثر در تیر ۲ برابر $\frac{2PL}{3}$ می باشد، مقدار تنش در تیر ۲ برابر است با:

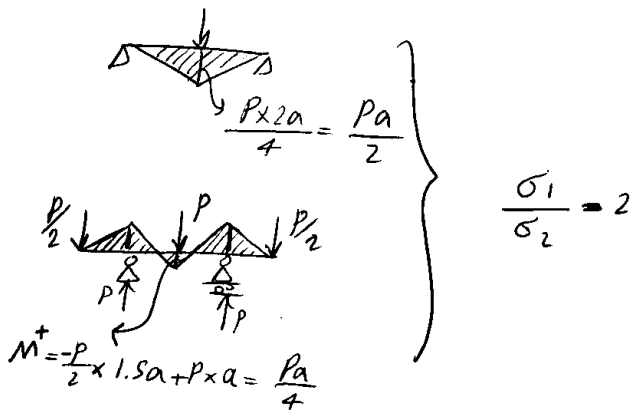
$$\sigma_2 = \frac{\left(\frac{2PL}{3}\right) a}{\frac{\pi a^4}{4}} = \frac{8}{3\pi} \times \frac{PL}{a^3} = \frac{8}{3\pi} \times 10 = \frac{80}{3\pi}$$

۵۶- اگر σ_1 تنش ماکزیمم خمشی در تیر شکل الف و σ_2 تنش ماکزیمم خمشی در تیر شکل ب باشد نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چقدر است؟

(مقطع هر دو تیر یکی است)



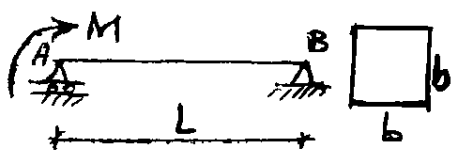
- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲



سراسری ۹۲

۵۴- چنانچه بخواهیم در تیر زیر، با مقطع مربع، تنش مجاز کششی و فشاری، مقادیر یکسان σ_a را داشته باشیم، حداقل مقدار

b ، کدام است؟



$$\sqrt{\frac{6M}{G_a}} \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{2M}{G_a}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{3M}{G_a}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{6M}{G_a}} \quad (4)$$

گزینه ۱

$$\sigma_a = \frac{6M}{bh^2} \rightarrow \sigma_a = \frac{6M}{b^3} \rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{6M}{\sigma_a}}$$

سراسری ۸۴

۴۷- دو تیر ۱ و ۲ دارای طول و پهنای یکسان می‌باشند، ارتفاع هر دو تیر در تکیه‌گاه یکی است ولی تیر یک با ارتفاع متغیر با تغییرات خطی و

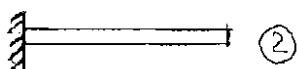
تیر دو با ارتفاع ثابت است. زیر اثر بار گسترده یکنواخت، نسبت $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}}$ در وسط طول تیرها چقدر است؟



۴ (۱)

۲ (۲)

۱ (۳)



$\frac{1}{2}$ (۴)

بار گذاری یکسان است و بنابراین $MI=M2$ یعنی لنگر ها یکسان هستند.

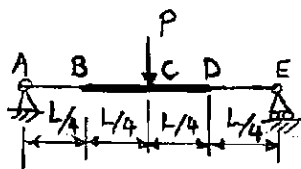
ولی تنش در مقاطع متفاوت است:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Mc_1}{I_1} = \frac{6M}{b \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{24M}{bh^2} \\ \sigma_2 &= \frac{Mc_2}{I_2} = \frac{6M}{bh^2} \end{aligned} \right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 4$$

سراسری ۸۵

۴۳- تیر شکل روبرو به مقطع مستطیل به پهنای ثابت است که ارتفاع قسمت BD دو برابر ارتفاع قسمت‌های دیگر می‌باشد. اگر تمرکز

تنش صرفنظر شود تنش ماگزیمم مقطع C چند برابر تنش ماگزیمم مقطع B است؟



۱ (۱)

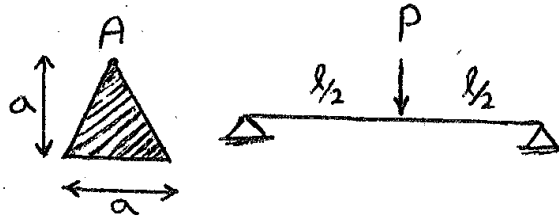
۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$$M_C = 2M_B$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_C &= \frac{6M_C}{b(2h)^2} = \frac{3M_C}{2bh^2} \\ \sigma_B &= \frac{6M_B}{bh^2} \end{aligned} \right\} \frac{\sigma_C}{\sigma_B} = \frac{M_C}{4M_B} = \frac{1}{2}$$



۵۳- در تیر ساده نشان داده شده تغییر طول تار فوقانی تیر (رأس A) تحت بار P کدام است؟ (E مدول الاستیسیته مصالح می باشد)

$$2 \frac{Pl^2}{Ea^3} \quad (1) \quad \frac{Pl^2}{Ea^3}$$

$$4 \frac{Pl^2}{Ea^3} \quad (2) \quad 3 \frac{Pl^2}{Ea^3}$$

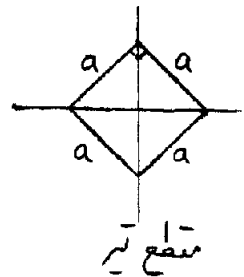
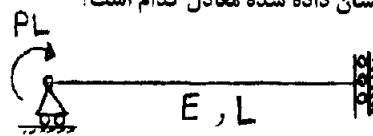
گزینه ۳

تار فوقانی تحت اثر فشار ناشی از خمش قرار دارد و طول آن کاهش می یابد. تنش فشاری وارد بر تار فوقانی در طول تیر متغیر است. در وسط تیر که لنگر ماکزیمم است، تنش فشاری برابر است با $\frac{6PL}{a^3}$ با $\sigma = \frac{M(\frac{2a}{3})}{I} = \frac{(\frac{PL}{4})(\frac{2a}{3})}{\frac{a^4}{36}} = \frac{6PL}{a^3}$ ولی در ابتدا و انتهای تیر برابر صفر است. با توجه به اینکه تغییرات لنگر به صورت خطی می باشد، می توان برای محاسبه تغییر طول تار از تنش میانگین استفاده کرد:

$$\Delta L = \frac{\sigma_{ave} L}{E} = \frac{(\frac{1}{2} \frac{6PL}{a^3}) L}{E} = \frac{3PL^2}{Ea^3}$$

سراسری ۹۳

۴۹- تغییر طول تار فوقانی در تیر با مقطع نشان داده شده معادل کدام است؟



$$6\sqrt{2} \frac{PL^2}{Ea^3} \quad (1)$$

$$2\sqrt{2} \frac{PL^2}{Ea^3} \quad (2)$$

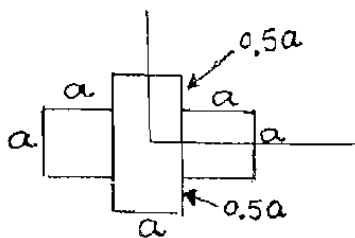
$$\sqrt{2} \frac{PL^2}{Ea^3} \quad (3)$$

$$12\sqrt{2} \frac{PL^2}{Ea^3} \quad (4)$$

سراسری ۸۴

۴۶- مقطع تیری مطابق شکل از چسباندن سه قسمت بهم تشکیل شده است. اگر لنگر خمشی M حول محور افقی تنش ماکزیمم σ_1 و

لنگر خمشی M حول محور قائم تنش ماکزیمم σ_2 را ایجاد کند، نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ چیست؟



- (۱) $\frac{15}{28}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{21}{15}$
- (۴) $\frac{2}{2}$

$$\sigma_1 = \frac{M(a)}{\frac{a(2a)^3}{12} + 2\left[\frac{a^3 \times a}{12}\right]} = \frac{6M}{5a^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{M(1.5a)}{\frac{a(3a)^3}{12} + 2\left[\frac{0.5a(a)^3}{12}\right]} = \frac{9M}{14a^2} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{6 \times 14}{9 \times 5} = \frac{28}{15}$$

سراسری ۸۷

۶۰- میله‌ای دارای مقطعی به شکل لوله با ضخامت کم t و شعاع R است. یک بار زیر اثر لنگر خمشی M و بار دوم زیر اثر لنگر پیچشی $T=M$ قرار می‌گیرد. نسبت تنش فشاری ایجاد شده در حالت اول به حالت دوم چقدر است؟

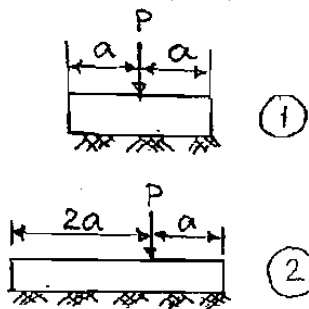
- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۴

در حالت اول: $\sigma_1 = \frac{MR}{\pi R^3 t}$
 در حالت دوم: $\sigma_2 = \frac{MR}{2\pi R^3 t}$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

سراسری ۸۴

۵۸- بعد دیگر پی‌های نشان داده شده در شکل روبرو مساویست. تنش‌های ماکزیمم وارد بر خاک به ترتیب σ_1 و σ_2 فرض می‌شود، نسبت



- چيست $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ ؟
- (۱) ۱
 - (۲) $\frac{1}{2}$
 - (۳) ۱.۵
 - (۴) $\frac{3}{4}$

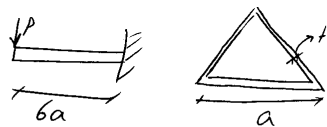
فرض کنیم b بعد دیگر باشد

$$\sigma_1 = \frac{P}{2ab} \quad \sigma_2 = \frac{P}{3ab} + \frac{(P \times 0.5a) \times 1.5a}{\frac{(3a)^3 b}{12}} = \frac{2P}{3ab} \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{3}{4}$$

۶۶- مقدار جابه‌جایی قائم انتهای تیر کنسول به طول $6a$ بر اثر بار قائم P در انتهای آن کدام است؟ (مقطع تیر قوطی به شکل مثلث متساوی الاضلاع با هر ضلع به طول a و ضخامت جداره t می‌باشد و مدول ارتجاعی نیز برابر E است.)

$216\sqrt{3} \frac{P}{Et}$ (۴)
 $288 \frac{P}{Et}$ (۳)
 $144 \frac{P}{Et}$ (۲)
 $144\sqrt{3} \frac{P}{Et}$ (۱)

$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$ را بنویس
 فقط باید I را حساب کنیم

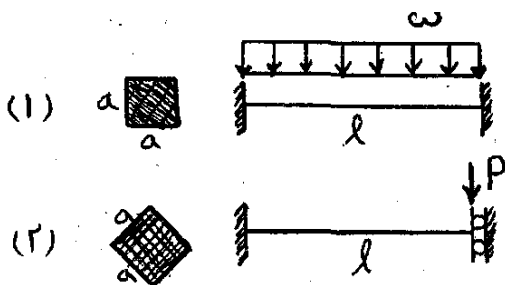


$$I' = \left(\frac{a \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3}{36} \right)' = \left(\frac{\sqrt{3}a^4}{96} \right)' = \frac{\sqrt{3}a^3}{24} (a)' = \frac{\sqrt{3}a^3}{24} (2\sqrt{3}t) = \frac{a^3t}{4}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{P(6a)^3}{3E \frac{a^3t}{4}} = 288 \frac{P}{Et}$$

آزاد ۹۲

۵۵- مقدار شدت بار گسترده (w) چقدر باشد تا تنش خمشی حداکثر در هر دو تیر با مقاطع نشان داده شده با هم برابر شود؟



$w = \sqrt{2} \frac{P}{l}$ (۲)
 $w = 6 \frac{P}{l}$ (۱)

$w = 6\sqrt{2} \frac{P}{l}$ (۴)
 $w = \frac{6\sqrt{2} P}{2 l}$ (۳)

گزینه ۴

لنگر خمشی در تیرها برابر است با:

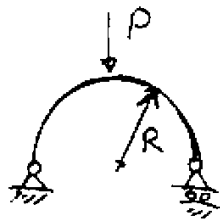
$$M_1 = \frac{wl^2}{12}$$

$$M_2 = \frac{PL}{2}$$

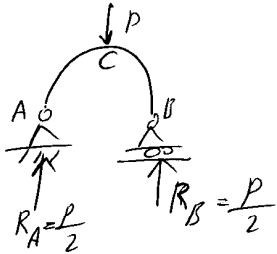
و تنش خمشی برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{6M_1}{a^3} = \frac{wl^2}{2a^3} \\ \sigma_2 &= \frac{M_2 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)}{\frac{a^4}{12}} = \frac{3\sqrt{2}PL}{a^3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow w = \frac{6\sqrt{2}P}{l}$$

۶۴- فوسی به شکل نیم دایره مطابق شکل، زیر اثر نیروی قائم P در رأس می‌باشد. مقطع فوس به شکل دایره به شعاع r می‌باشد. ماکزیمم تنش خمشی در آن چه مقدار است؟



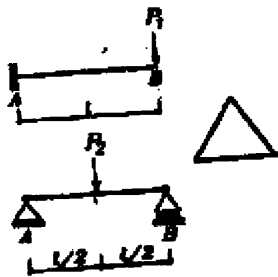
- (۱) $\frac{PR}{2\pi r^3}$
- (۲) $\frac{2PR}{\pi r^3}$
- (۳) $\frac{PR}{\pi r^3}$
- (۴) $\frac{PR}{2\pi r^3}$



نگر ماکزیمم در وسط اتفاق می‌افتد
(مانند تیر) در وسط M_{max} است

$$M_C = R_B \times r = \frac{PR}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{M r}{\frac{\pi}{4} r^4} = \frac{(\frac{PR}{2}) r}{\frac{\pi}{4} r^4} = \frac{2PR}{\pi r^3}$$

۵۳- دو تیر زیر دل‌وای مقطع مثلثی مطابق شکل می‌باشند. بار P_2 چقدر باشد تا تنش خمشی کششی ماکزیمم دو تیر مساوی شوند؟



۱۶P_۱ (۱)

۸P_۱ (۲)

۴P_۱ (۳)

۲P_۱ (۴)

$$M_{max}^- = P_1 L$$

$$M_{max}^+ = 0$$

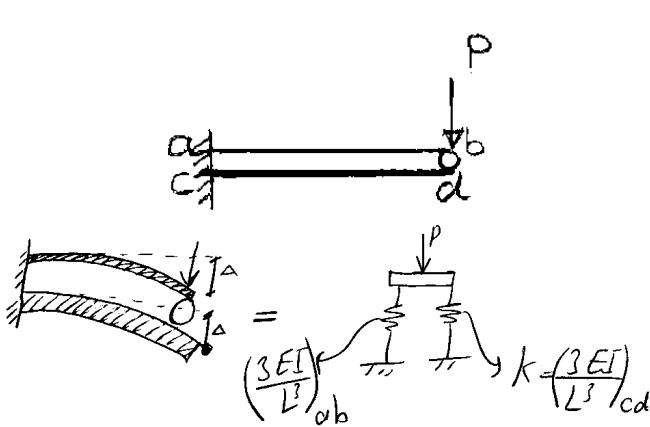
تیر اول (بالا) → تنش کشش $\sigma_1 = \frac{M \times \frac{2h}{3}}{I} = \frac{2P_1 L h}{3I}$ → $\frac{2P_1 L h}{3I} = \frac{P_2 L h}{12I} \rightarrow P_2 = 8P_1$

تیر دوم (پایین) → تنش فشار $\sigma_2 = \frac{M \times \frac{h}{3}}{I} = \frac{(\frac{P_2 L}{4}) \times \frac{h}{3}}{I} = \frac{P_2 L h}{12I}$

سراسری ۸۶

۶۰- تیر یک سرگیردار ab توسط غلتکی روی تیر یک سرگیردار cd تکیه می‌کند و نیروی p مطابق شکل در نقطه b اثر می‌کند. مقطع هر دو

تیر مستطیل با پهنای مساوی است ولی ارتفاع مقطع تیر cd دو برابر ارتفاع مقطع تیر ab است. $\frac{(\sigma_{ab})_{max}}{(\sigma_{cd})_{max}}$ چقدر است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

فکرند باعث می‌شود که Δ هر دو تیر یکسان باشد.
 چون Δ برابر است زیر نسبت سفتی تقسیم
 می‌شود و چون ارتفاع cd دو برابر است

$$I_{cd} = (2^3) \times I_{ab} \Rightarrow \frac{M_{ab}}{M_{cd}} = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow I_{cd} = 8 I_{ab}$$

از طرفی از آنجا که $\sigma = \frac{6M}{bd^2}$ با برابری $d_{cd} = 2d_{ab}$ رابطه مکن را در وجود $\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{cd}} = 4 \left(\frac{M_{ab}}{M_{cd}} \right) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

تمرین: سراسری ۸۰

میله‌ای به قطر d زیر اثر لنگر پیچشی T_w قرار می‌گیرد و در آن تنش برشی τ_w به وجود می‌آید. اگر این میله زیر اثر لنگر خمشی M_w قرار گیرد، در آن تنش عمودی σ_w به وجود می‌آید. با فرض اینکه $\tau_w = 0.6\sigma_w$ باشد، مقدار α در رابطه $T_w = \alpha M_w$ کدام است؟

۰٫۶ (۴) ۰٫۳ (۳) ۱٫۲ (۲) ۰٫۸ (۱)

$$\left. \begin{aligned} \tau_w &= \frac{T_w R}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{2T_w}{\pi R^3} \\ \sigma_w &= \frac{M_w R}{\frac{\pi}{4} R^4} = \frac{4M_w}{\pi R^3} \end{aligned} \right\} \rightarrow T_w = ? M_w$$

$$\tau_w = 0.6\sigma_w$$

تمرین: سراسری ۸۲

۳۴- میله‌ای که مقطع آن دایره‌ای است زیر اثر لنگر پیچشی T دارای تنش برشی ماکزیمم 40 MPa می‌باشد. اگر همین میله زیر اثر لنگر خمشی M که مقدار آن مساوی T است قرار گیرد تنش برشی ماکزیمم آن چقدر می‌شود؟

- ۴۰ (۴)
- $40\sqrt{2}$ (۳)
- ۲۰ (۲)
- ۸۰ (۱)

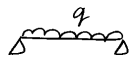
گزینه ۱

تمرین: سراسری ۸۴

۵۶- دو تیر ساده آلومینیومی و فولادی با ابعاد یکسان زیر اثر وزن خود قرار دارند. نسبت $\frac{\sigma_a}{\sigma_s}$ چیست؟

$$(E_s = 3E_a = 2.1 \times 10^8 \frac{kg}{cm^2}, \gamma_s = 3\gamma_a = 7.8 \frac{t}{m^3})$$

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad \frac{1}{9} \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$



منظور از تیر ساده همان تیر دوسر مفصل است و تحت اثر وزن خود یعنی بار گسترده یکنواخت داریم: مقدار M را برای هر دو حالت محاسبه می کنیم:

$$q_a = \gamma_a \times A = \frac{7.8}{3} \times A \Rightarrow M_a = \frac{q_a L^2}{8} = \frac{(7.8/3)AL^2}{8}$$

$$q_s = \gamma_s \times A = 7.8 \times A \Rightarrow M_s = \frac{7.8AL^2}{8}$$

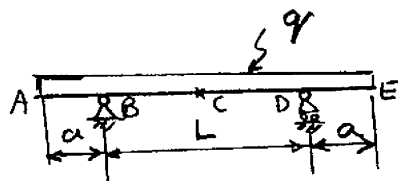
گام بعدی محاسبه تنش می باشد: از آنجا که شکل مقطع برای هر دو حالت یکسان است، در رابطه $\sigma = \frac{Mc}{I}$ مقادیر c و I برای هر دو

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_s} = \frac{M_a}{M_s} = \frac{1}{3} \quad \text{مقطع یکسان است و داریم:}$$

تمرین: سراسری ۸۷

۶۲- تیر شکل روبرو دارای مقطعی ثابت و قرینه نسبت به محورهای افقی و قائم است. تنش خمشی در نقاط C و D برابر است. $\frac{a}{L}$ چقدر

است؟



- (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (2) $\frac{1}{2}$
- (3) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (4) $\frac{1}{4}$

$$M^- = \frac{qa^2}{2}$$

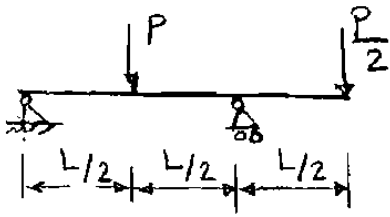
$$R = \frac{q(L+2a)}{2}$$

$$M^+ = -\frac{q(a+\frac{L}{2})^2}{2} + \frac{q(L+2a)}{2} \times \frac{L}{2} = q(a+\frac{L}{2}) \left[-\frac{(a+\frac{L}{2})}{2} + \frac{L}{2} \right]$$

$$= q(a+\frac{L}{2}) \left(\frac{L}{2} - a \right) = \frac{q}{2} \left(\frac{L^2}{4} - a^2 \right) \Rightarrow M^- = M^+ \Rightarrow \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2} \left(\frac{L^2}{4} - a^2 \right)$$

$$\Rightarrow 8a^2 = L^2 \rightarrow \frac{a}{L} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۴۳- مقطع تیر شکل روبرو مربع مستطیل می باشد. تنش مجاز فشاری چند برابر تنش مجاز کششی باشد تا با افزایش P هر دو تنش با هم به مقدار مجاز برسند؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)
- ۱ (۴)

ابتدا باید تنش کششی و فشاری را بیابیم:

دو برابر M^+ است M^-

رابطه $\sigma = \frac{Mc}{I}$

یعنی در این نقطه اگر M^- کار کنیم M^+ هم

رابطه $\sigma = \frac{Mc}{I}$

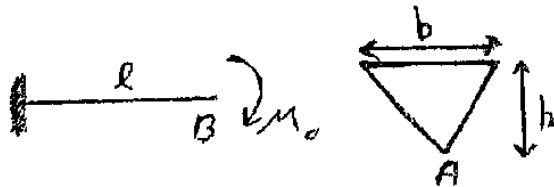
رابطه $\sigma = \frac{Mc}{I}$

تنش فشاری در این نقطه هم کششی پس مقادیر مجاز هر دو تنش فشاری و کششی باید یکسان باشد.

آزاد ۹۰

۵۶- اگر کرنش عمودی ایجاد شده در رأس A از مقطع مثلثی تیر نشان داده شده برابر با ϵ_0 باشد، آنگاه

تغییر مکان نقطه B چه مضربی از $\frac{\epsilon_0 L^2}{h}$ می باشد؟



- ۱ (۱) $\frac{4}{3}$
- ۲ (۲) $\frac{3}{4}$
- ۳ (۳) $\frac{3}{2}$
- ۴ (۴) $\frac{2}{3}$

در اینم کرنش برابر است با:

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc}{EI} = \frac{M_0 \left(\frac{2h}{3}\right)}{EI} \quad \text{I}$$

و تغییر مکان نقطه B برابر است با:

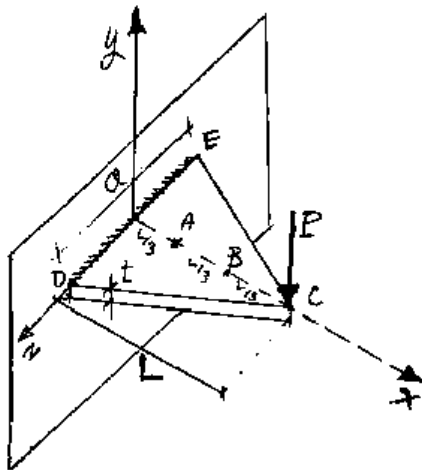
$$\Delta_B = \frac{M_0 L^2}{2EI} \quad \text{II}$$

به جای $\frac{M_0}{EI}$ در رابطه II، مقدار I

در رابطه I را جایگزین می کنیم

$$\Delta_B = \frac{\left(\frac{3\epsilon_0}{2h}\right) L^2}{2} = \frac{3\epsilon_0 L^2}{4h} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۵۱- ورق مثلثی شکل CDE با ضخامت یکسان t ، در امتداد DE به طور گیردار به تکیه‌گاه متصل بوده و تحت اثر بار P عمود بر صفحه CDE قرار دارد. کرنش‌های ϵ_x ایجاد شده در نقاط A و B (مطابق شکل) واقع بر روی صفحه به صورت کدام رابطه بهم مرتبطند؟



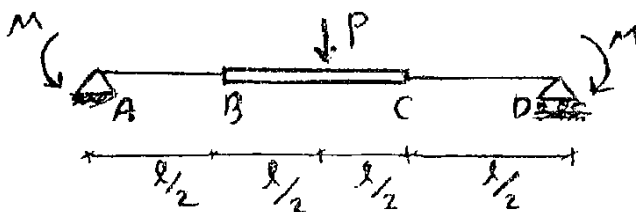
- (۱) $(\epsilon_x)_A = 2(\epsilon_x)_B$
- (۲) $(\epsilon_x)_A = \sqrt{2}(\epsilon_x)_B$
- (۳) $(\epsilon_x)_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\epsilon_x)_B$
- (۴) $(\epsilon_x)_A = (\epsilon_x)_B$

گزینه ۴

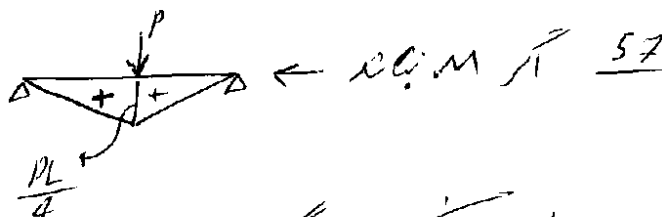
با توجه به اینکه مدول الاستیسیته ثابت است، نسبت کرنش‌ها با نسبت تنشها برابر است:

$$\frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} = \frac{\left(\frac{6M_A}{2b \times h^2}\right)}{\left(\frac{6M_B}{b \times h^2}\right)} = \frac{M_A}{2M_B} = 1$$

۵۷- ارتفاع تیر با مقطع مستطیلی در قسمت BC، دو برابر سایر قسمت‌ها می‌باشد و پهنای تیر در طول آن ثابت است. مقدار انگر M چقدر باشد تا حداکثر تنش خمشی در طول تیر حداقل شود؟



- (۱) $\frac{Pl}{20}$
- (۲) $\frac{Pl}{5}$
- (۳) $\frac{Pl}{10}$
- (۴) $\frac{Pl}{4}$



با دار شدن M، دیگر از پهنای ثابت، M با M در دو سر

$$\sigma_1 = \frac{6M}{bh^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{6\left(\frac{Pl}{4} - M\right)}{b(2h)^2}$$

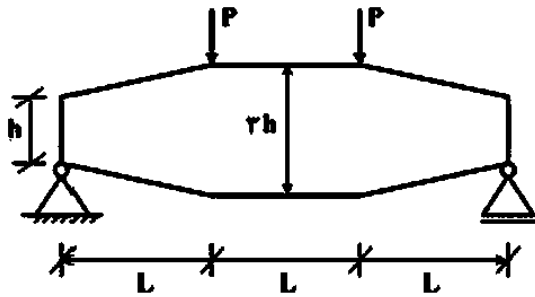
$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 > \sigma_2 \text{ اگر } M \text{ زیاد باشد} \\ \sigma_1 < \sigma_2 \text{ اگر } M \text{ کم باشد} \end{array} \right\}$

$\sigma_2 > \sigma_1$ خواهد بود

حالت بین این است که $\sigma_1 = \sigma_2$ باشد

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \frac{6M}{bh^2} = \frac{6\left(\frac{Pl}{4} - M\right)}{b(2h)^2} \Rightarrow M = \frac{Pl}{20}$$

۱۶- تیر نشان داده شده در شکل زیر، دارای مقطع مستطیلی با عرض ثابت b و عمق متغیر از h تا $2h$ به صورت زیر می باشد. حداکثر تنش ناشی از لنگر خمشی در این تیر کدام است؟



- (۱) $\frac{3 PL}{2 bh^2}$
 (۲) $\frac{2 PL}{3 bh^2}$
 (۳) $\frac{3 PL}{4 bh^2}$
 (۴) $\frac{PL}{bh^2}$

گزینه ۳

تنش خمشی در فاصله x از تکیه گاه برابر است با:

$$M = Px \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(Px)}{b\left(h + \frac{2x}{L}h\right)^2}$$

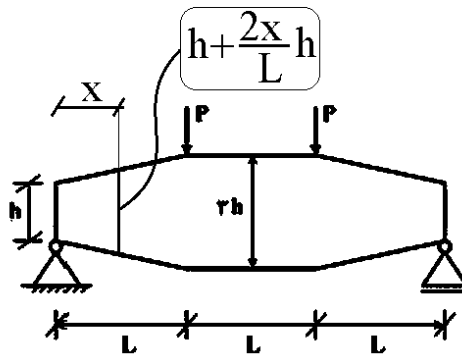
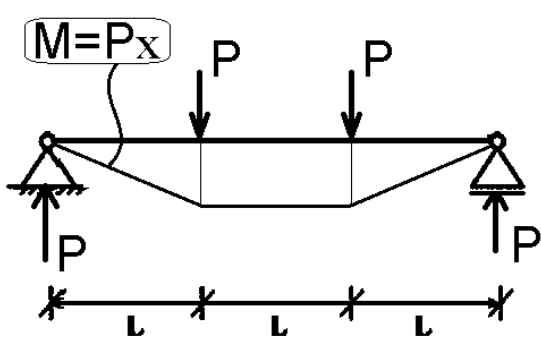
برای یافتن تنش حداکثر باید از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم:

$$\left(\frac{6(Px)}{b\left(h + \frac{2x}{L}h\right)^2}\right)' = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{x}{\left(1 + \frac{2x}{L}\right)^2}\right)' = 0 \quad \rightarrow \quad 1 \times \left(1 + \frac{2x}{L}\right)^2 - 2 \times \frac{2}{L} \times \left(1 + \frac{2x}{L}\right)x = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(1 + \frac{2x}{L}\right) - \frac{4x}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{L}{2}$$

پس از یافتن x مقدار تنش بدست می آید:

$$\rightarrow \sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(Px)}{b\left(h + \frac{2x}{L}h\right)^2} = \frac{3PL}{b(2h)^2} = \frac{3 PL}{4 bh^2}$$



۱۳-۱- ظرفیت خمشی

سراسری ۸۷

۶۳- دو تیر زیر اثر لنگر خمشی مقاومت مساوی دارند. تیر اول دارای مقطع دایره به شعاع R و تیر دوم به مقطع مستطیل به پهنای b و به ارتفاع

2b است. نسبت $\frac{b}{R}$ چقدر است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

(۱) $\frac{2\pi}{2}$

$M = \sigma \left(\frac{(2b)^2 b}{6} \right) = \frac{2\sigma b^3}{3}$ مربع
 $\Rightarrow \frac{\sigma I}{c} =$ مقاومت خمشی
 تنش مجاز

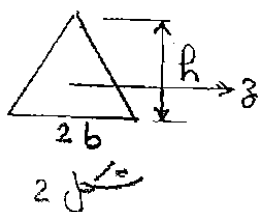
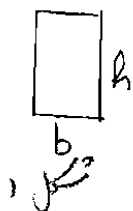
$M = \sigma \left(\frac{\pi R^4}{4} \right) = \frac{\pi \sigma R^4}{4}$ دایره

$M = M \Rightarrow \frac{2\sigma b^3}{3} = \frac{\pi \sigma R^4}{4} \rightarrow \frac{b}{R} = \frac{\sqrt[3]{3\pi}}{2}$

سراسری ۸۶

۵۷- دو مقطع شکل روبرو از ماده‌ای هستند که تنش مجاز فشاری آن دو برابر تنش کششی مجاز آن است. نسبت لنگر خمشی مثبت مجاز

وارد به دو مقطع $(\frac{M_1}{M_2})$ چقدر است؟ (برای مثلث $I_z = 2bh \times \frac{h^2}{12}$)

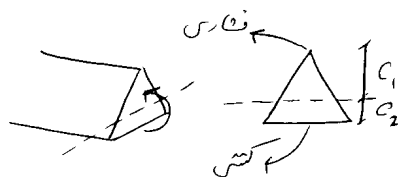


- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

در مستطیل چون تنش فشاری در
 کشش برابری است $(c_1 = c_2)$

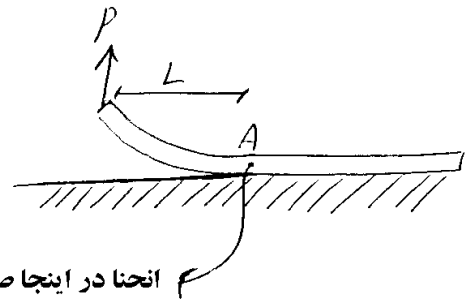
$M_1 = \sigma_f \times \frac{bh^2}{6}$

در مثلثی تنش فشاری در برابر تنش کشش خواهد بود چون $c_1 = 2c_2$
 با بزرگ کردن فاصله تنش را یک کنیم یا کشش را



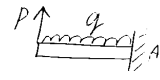
$M_2 = \frac{\sigma_f \left(\frac{2bh^3}{36} \right)}{c_2} = \frac{\sigma_f \frac{2bh^3}{36}}{\left(\frac{h}{3} \right)} = \sigma_f \frac{bh^2}{6} \rightarrow M_1 = M_2$

۱۳-۲- تیر بر روی بستر صلب



انحنای در اینجا صفر است (تیر افقی می شود)

در هر نقطه ای که انحنای صفر شود، لنگر داخلی نیز صفر خواهد بود. بنابراین لنگر داخلی را در نقطه A محاسبه کرده و مساوی صفر قرار می دهیم. از طرفی به علت مماس شدن تیر بر بستر صلب زیرین دوران (θ) نقطه A برابر صفر است.

روش حل: در تیر فوق به صورت  یک تکیه گاه گیردار در نقطه A در نظر گرفته و سپس لنگر در تکیه گاه مجازی را محاسبه و برابر صفر قرار می دهیم.

سراسری ۸۸

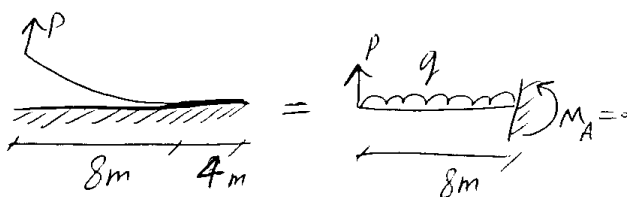
۶۷- یک شاخه تیر آهن ۱۲ متری با وزن 2400 N روی زمین سفت و صلب قرار دارد. اگر یک انتهای آن به بالا کشیده شود به طوری که ۸ متر از تیر از زمین جدا شود نیروی لازم چند نیوتن می باشد؟ $E = 200 \text{ GPa}$ و $I = 20000 \text{ cm}^4$ می یابند.

۱۶۰۰ (۴)

۶۰۰ (۳)

۶۶۷ (۲)

۸۰۰ (۱)



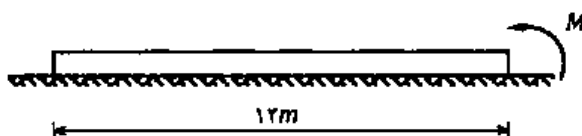
دین داخل

$$q = \frac{2400}{12} = 200$$

$$P \times 8 - \frac{q \times 8^2}{2} = 0 \rightarrow P \times 8 = \frac{200 \times 8^2}{2} \rightarrow P = 800 \text{ N}$$

سراسری ۹۴

۵۵- در شکل زیر یک تیر یکنواخت با طول ۱۲ متر و وزن 180 kg که روی سطحی کاملاً صلب قرار گرفته، نشان داده شده است. مقدار لنگر M (بر حسب $\text{kg}\cdot\text{m}$) چقدر باشد تا ۴ متر از طول تیر از سطح تکیه گاه جدا شود؟



۳۰۰ (۱)

۲۴۰ (۲)

۱۸۰ (۳)

۱۲۰ (۴)

$$q = \frac{180 \text{ kg}}{12 \text{ m}} = 15 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

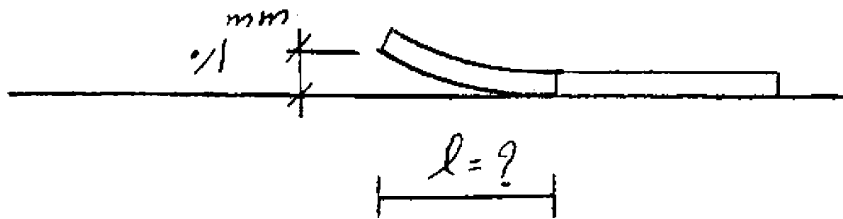
وزن واحد طول تیر برابر است با: $15 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

در انتهای ۴ متری از تیر لنگر صفر خواهد بود (چون انحنای صفر می شود):

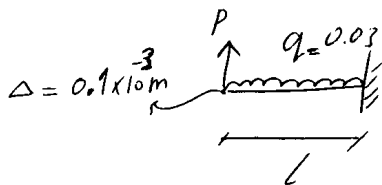
$$M_{4m} = M - \frac{qL^2}{2} = 0 \rightarrow M - \frac{15 \times 4^2}{2} = 0 \rightarrow M = 120 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

۸۸ سراسری

۸- تیری که طول آن به حد کافی طولانی است بر روی زمین صلب قرار گرفته است. اگر انتهای آن را به اندازه ۰/۱ میلی‌متر بالا ببریم، طولی که از آن بر حسب متر (m) از زمین جدا می‌شود، چقدر است؟ (وزن تیر ۰/۰۳ تن بر متر و $EI = 2004 \cdot m^4$ می‌باشد).



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱/۵ (۳)
- ۳ (۴)

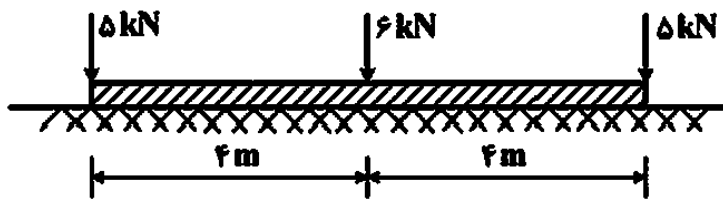


$$M = PL - \frac{0.03L^2}{2} = 0 \rightarrow P = 0.015L$$

$$0.1 \times 10^{-3} = \frac{PL^3}{3 \times 200} - \frac{0.03 \times L^4}{8 \times 200} \rightarrow 0.1 \times 10^{-3} = \frac{0.015L^4}{3 \times 200} - \frac{0.03 \times L^4}{8 \times 200} \rightarrow L = 2m$$

۹۵ دکتری

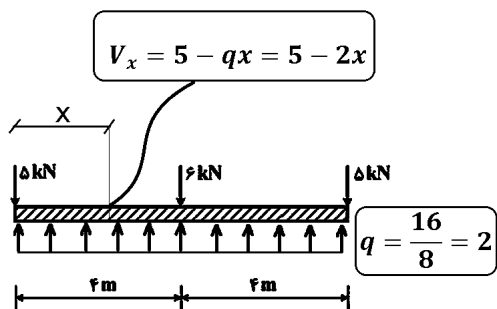
۲۰- در تیر صلب زیر چنانچه مدول بستر زمین ثابت باشد، قدر مطلق حداکثر لنگر ایجادشده در تیر چند کیلونیوتن - متر است؟



- ۱۰,۲۵ (۱)
- ۶,۲۵ (۲)
- ۴ (۳)
- ۲,۲۵ (۴)

گزینه ۲

با توجه به تقارن، حرکت میله صلب یکنواخت و متقارن خواهد بود و در نتیجه با توجه به ثابت بودن سختی زمین، فشار یکنواخت در زیر تیر خواهیم داشت:

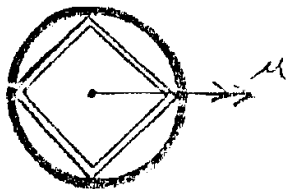


خمش حداکثر در محل برش صفر رخ می دهد:

$$V = 0 \rightarrow 5 - 2x = 0 \rightarrow x = 2.5 \rightarrow M_x = 5x - \frac{qx^2}{2} = 5 \times 2.5 - 2 \times \frac{2.5^2}{2} = 6.25$$

آزاد ۹۰

۵۴- تقریباً چند درصد از لنگر خمشی اعمال شده به مقطع توسط بخش هاشور خورده حلقه‌ای تحمل می‌گردد؟
(شعاع متوسط حلقه برابر با R و ضخامت تمام قسمت‌ها یکسان و برابر t می‌باشد)



(۲) ۳۰ درصد

(۱) ۲۰ درصد

(۴) ۴۰ درصد

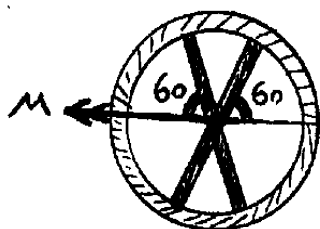
(۳) ۶۰ درصد

لنگر به نسبت ممان اینرسی تحمل می‌شود

$$\begin{aligned}
 \text{ممان اینرسی قسمت هاشور خورده} &= \frac{\pi R^3 t}{4 \left[\frac{4}{3} \times \sqrt{2} \right] + \pi R^3 t} \\
 \text{ممان اینرسی کل مقطع} &= \frac{\pi R^3 t}{\frac{4}{3} \times \sqrt{2} + \pi} \\
 &= \frac{3}{1.3 \times 1.4 + 3} \approx \frac{3}{1.5 + 3} = 60\%
 \end{aligned}$$

آزاد ۹۱

۵۳- چه کسری از لنگر خمشی M توسط قسمت جدار نازک حلقه‌ای شکل تحمل می‌شود؟ (ضخامت و جنس تمام قسمت‌های مقطع یکسان می‌باشد)

(۲) $\frac{\pi}{\pi+1}$ (۱) $\frac{1}{\pi+2}$ (۴) $\frac{3\pi}{3\pi+2}$ (۳) $\frac{3\pi}{3\pi+1}$

گزینه ۲

لنگر به نسبت ممان اینرسی هر قسمت تحمل می‌شود و سهم قسمت دایره ای برابر با نسبت ممان اینرسی قسمت دایره ای به ممان اینرسی کل مقطع است. بنابراین باید ممان اینرسی دایره و اعضای مورب را محاسبه کنیم:

$$I_{circle} = \pi R^3 t$$

در محاسبه ممان اینرسی اعضای مایل، ضخامت معادل برابر $\frac{t}{(\sin 60)}$ و ارتفاع معادل برابر $2R \times \sin 60$ می‌باشد:

$$I_{line} = 2 \times \frac{t \times (2R)^3 \times (\cos 30)^2}{12} = tR^3$$

هم لنگر دایره برابر خواهد بود با:

$$M_{circle} = \frac{\pi R^3 t}{\pi R^3 t + tR^3} = \frac{\pi}{\pi + 1}$$

۵۲- یک مقطع لوله‌ای شکل به شعاع متوسط r و ضخامت t تحت اثر لنگر خمشی M قرار دارد. برآیند نیروهای وارد بر مقطع در بالای محور خشی چقدر است؟

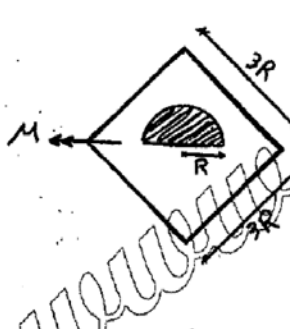
$$\frac{M}{\pi r} \quad (۱)$$

$$\frac{4M}{3\pi r} \quad (۳)$$

$$\frac{5M}{3\pi r} \quad (۴)$$

$$\frac{2M}{\pi r} \quad (۲)$$

گزینه ۲



۵۱- مقدار نیروی اعمال شده به بخش نیم دایره‌ای هاشور خورده ناشی از لنگر خمشی M کدام است؟

$$\frac{7M}{15R} \quad (۱)$$

$$\frac{3M}{71R} \quad (۳)$$

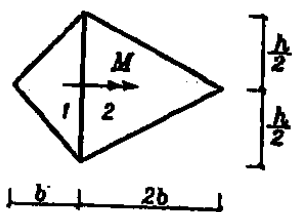
$$\frac{4M}{27R} \quad (۲)$$

$$\frac{8M}{81R} \quad (۴)$$

گزینه ۴

مقدار نیروی وارد شده بر قسمتی خاص از یک مقطع تحت اثر خمش از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$F = \frac{MQ}{I} = \frac{M \left(\frac{\pi R^2}{2} \times \frac{4R}{3\pi} \right)}{\frac{(3R)^4}{12}} = \frac{8M}{81R}$$



۵۲- در تیر زیر لنگر تحمل شده توسط مقطع اول چند برابر مقطع دوم می باشد؟ $(E_1 = 3E_2)$

۶ (۱)

۳ (۳)

۳/۲ (۲)

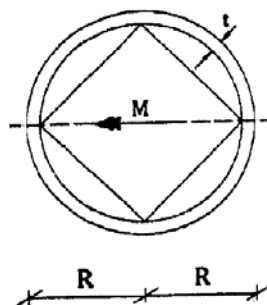
۳/۴ (۴)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{EI}{L}\right)_1 &= \frac{E_1 bh^3}{48} = \frac{(3E_2) bh^3}{48} \\ \left(\frac{EI}{L}\right)_2 &= \frac{E_2 2bh^3}{48} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\left(\frac{EI}{L}\right)_1}{\left(\frac{EI}{L}\right)_2} = \frac{3}{2}$$

سراسری ۹۳

۵۳- یک مقطع لوزی شکل توسط یک حلقه با اتصال کامل احاطه شده است. اگر به این مقطع لنگر خمشی مثبت وارد شود، چند درصد از لنگر توسط بخش حلقه

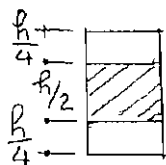
تحمل می‌شود؟ ($\pi \cong 3$ و $\frac{R}{t} = 9$)



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

تمرین: سراسری ۸۴

۴۸- مقطع تیری به شکل مستطیل است. اگر زیر اثر لنگر خمشی M قرار گیرد چه مقداری از لنگر توسط تنش‌های به وجود آمده در مساحت هاشور خورده ایجاد می‌شود؟



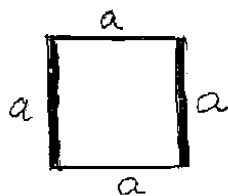
- (۱) $\frac{M}{2}$
- (۲) $\frac{M}{4}$
- (۳) $\frac{M}{8}$
- (۴) $\frac{M}{16}$

$$\frac{I_{\text{هاشور}}}{I_{\text{کل}}} = \frac{\left[\frac{b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} \right]}{\left[\frac{bh^3}{12} \right]} = \frac{1}{8} \rightarrow \text{سه قسمت هاشور خورده از لنگر} = \frac{M}{8}$$

تمرین: سراسری ۸۴

۴۹- شکل روبرو مقطع تیری است که جدارهای افقی به ضخامت t_1 و جدارهای قائم به ضخامت t_2 می‌باشند. t_2 و t_1 بسیار کم هستند.

نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ چقدر باشد تا نصف لنگر خمشی در جدارهای قائم و نصف آن در جدارهای افقی قرار گیرد؟

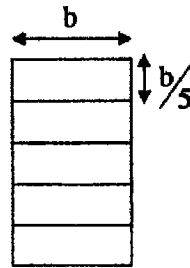
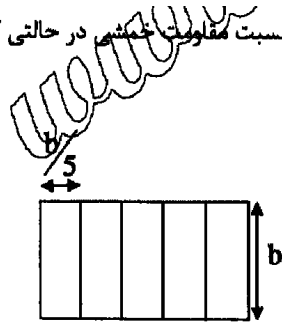


- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱

$$I_{\text{جدارهای قائم}} = I_{\text{جدارهای افقی}} \Rightarrow 2 \left[\alpha t_1 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] = 2 \times \left[\frac{\alpha^3 t_2}{12} \right] \Rightarrow \frac{\alpha^3 t_1}{2} = \frac{\alpha^3 t_2}{6} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 3$$

۶۰. اگر ۵ تیغه فولادی با سطح مقطع مشخص روبرو در دو حالت زیر قرار دهیم نسبت مقاومت خمشی در حالتی که

عمودی قرار گرفته‌اند (۱) به حالت (۲) چقدر است؟



1 (۱)

5 (۲)

25 (۳)

 $\frac{1}{5}$ (۴)

۱۳-۴- خمش دو محوره

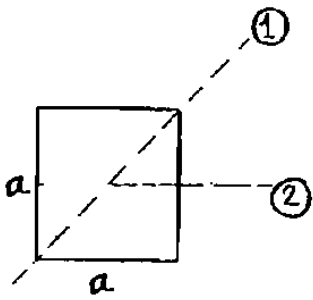
محورهای اصلی ممان اینرسی مقاطع:

اگر $I_{min} = I_{max}$ باشد:

سراسری ۸۲

۴۴- مدول مقطع مربع نسبت به یک قطر چند برابر مدول مقطع آن نسبت به محور موازی ضلع آنست؟

- ۱ (۱)
- $\sqrt{2}$ (۲)
- $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳)
- $\frac{1}{2}$ (۴)



مدول مقطع یعنی $S = \frac{I}{c}$

حلول کمر ۲-۲ $\rightarrow I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12}$

حلول کمر ۱-۱ $\rightarrow I = \frac{a^4}{12}$

$\rightarrow S_{2-2} = \frac{\frac{a^4}{12}}{(\frac{a}{2})} = \frac{a^3}{6}$

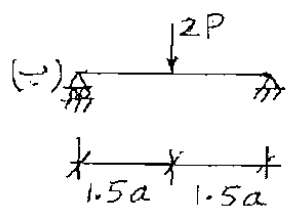
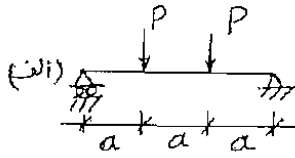
$S_{1-1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{(\frac{a\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2} a^3}{12}$

نکته: اگر از یک مقطع $I_x = I_y$ بود
حلول هر کدو دیگر که از مرکز سطح مقطع
بگذرد مقدار I ثابت است

$\rightarrow \frac{S_{1-1}}{S_{2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

سراسری ۸۴

۵۰- تیرهای «الف» و «ب» با مقطع مشخص در شکل مقابل موجود می‌باشند. نسبت تنش ماکزیمم خمشی تیر «ب» به تیر «الف» کدام است؟



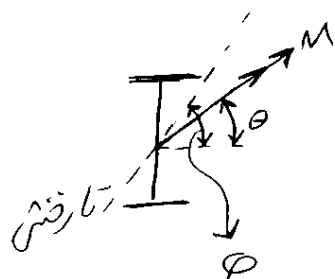
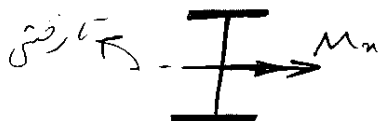
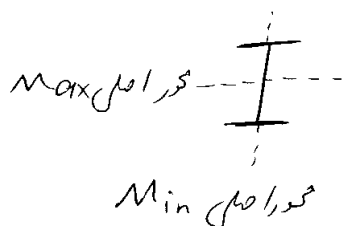
- $\sqrt{2}$ (۱)
- $2\sqrt{2}$ (۲)
- $3\sqrt{2}$ (۳)
- $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴)

(الف) $M = \Rightarrow M_{max} = Pa \quad \sigma_{\text{علی}} = \frac{6M}{a^3} = \frac{6Pa}{a^3} = \frac{6P}{a^2}$

(ب) $M = \Rightarrow M_{max} = \frac{3Pa}{2} \quad \sigma_{\text{علی}} = \frac{M (\frac{a\sqrt{2}}{2})}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6\sqrt{2} M}{a^3} = \frac{9\sqrt{2} P}{a^2}$

$\frac{\sigma_{\text{علی}}}{\sigma_{\text{علی}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

اگر لنگر در راستای یکی از محوره‌های اصلی وارد شود، تار خنثی بر محور خمش منطبق خواهد بود در غیر این صورت محور خنثی از محور خمش کمی منحرف شده و به سمت محور ضعیف تر متمایل می شود:



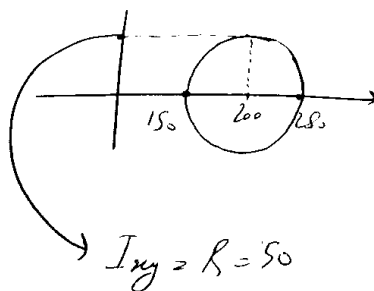
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \theta$$

آزاد ۸۵

۶۷- در یک نبشی بال مساوی $I_x = I_y = 200 \text{ Cm}^4$ می باشد. اگر همان اینرسی مقطع نسبت به یکی از محوره‌های اصلی برابر 150 Cm^4 باشد نوع این محور و مقدار I_{xy} کدام اند؟

۲) محور اصلی قوی و 50 Cm^4
۱) محور اصلی ضعیف و 50 Cm^4

۱) محور اصلی ضعیف و 75 Cm^4
۲) محور اصلی قوی و 75 Cm^4



$$\begin{aligned} \sigma_x &= I_x = 200 \\ \sigma_y &= I_y = 200 \\ \sigma_{\text{main}} &= I_{\text{main}} = 150 \end{aligned}$$

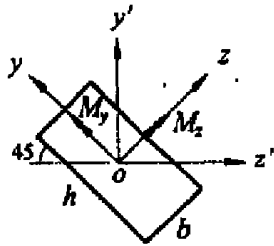
$$I_{xy} = R = 50$$

$$\rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\text{min}} + \sigma_{\text{max}} \rightarrow 200 + 200 = 150 + ? \rightarrow \begin{cases} \sigma_{\text{min}} = 150 \\ \sigma_{\text{max}} = 250 \end{cases}$$

$$\rightarrow \sigma_x \times \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_{\text{min}} \times \sigma_{\text{max}} \rightarrow 200 \times 200 - \tau_{xy}^2 = 150 \times 250 \rightarrow I_{xy} = \tau_{xy} = \pm 50$$

سراسری ۹۲- دکتری

۱۰- شکل زیر مقطع یک تیر تحت خمش را که به شکل مستطیلی به ابعاد b و h است، نشان می‌دهد. محورهای z و y محورهای اصلی گذرنده از مرکز مقطع هستند. نسبت M_z / M_y چقدر باشد، تا نارخنشی به محور z' منطبق گردد؟



$$-(\frac{b}{h})^2 \quad (1)$$

$$(\frac{b}{h})^2 \quad (2)$$

$$-(\frac{h}{b})^2 \quad (3)$$

$$(\frac{h}{b})^2 \quad (4)$$

سراسری ۹۱- دکتری

۱۰- شکل مقابل سطح مقطع دو تیر تحت خمش را که در راستای محور y بارگذاری شده‌اند نشان می‌دهد. در کدام حالت استفاده

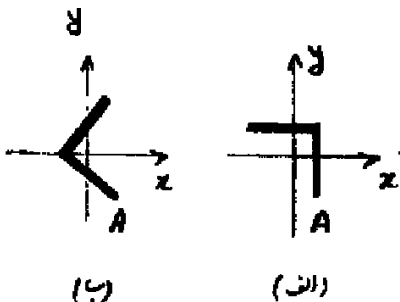
از رابطه $\sigma = \frac{My}{I_x}$ برای محاسبه تنش خمشی در نقطه A مجاز است؟

(۱) حالت «الف»

(۲) حالت «ب»

(۳) هر دو حالت «الف» و «ب»

(۴) هیچ یک از دو حالت



(ب)

(الف)

دکتری ۹۴

۳- شرط لازم برای اینکه معادله اساسی خمشی $\sigma = \frac{-My}{I}$ برای یک مقطع نامتقارن تحت ممان خمشی

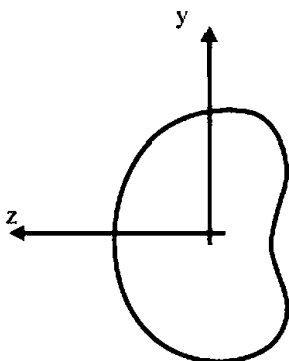
$M = M_z$ مطابق شکل برقرار باشد چه است؟

(۱) ممان خمشی M_y و حاصلضرب اینرسی I_{yz} برابر صفر باشد.

(۲) حاصلضرب اینرسی I_{yz} مخالف صفر باشد.

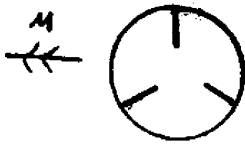
(۳) ممان خمشی M_y مخالف صفر باشد.

(۴) هیچگونه شرطی نیاز نمی‌باشد.

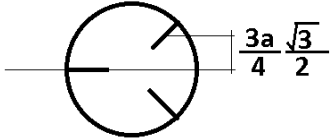


گزینه ۱

۶۴- مقطع تیری شامل لوله‌ای با شعاع a و ضخامت t همراه سه تقویت کننده به صورت ورق با عرض $\frac{a}{2}$ و ضخامت t می‌باشد به طوری که ورق‌ها در داخل لوله به جداره آن به طور عمود بر جداره اتصال یافته و امتداد آن‌ها با یکدیگر زاویه 120° درجه می‌سازند. تنش حداکثر در تیر بر اثر لنگر خمشی M را بدست آورید.



$$\begin{aligned} & \frac{0.28M}{\pi a^2} \quad (1) \\ & \frac{0.28M}{\pi a^2} \quad (2) \\ & \frac{0.28M}{\pi a^2} \quad (3) \\ & \frac{M}{\pi a^2} \quad (4) \end{aligned}$$



$$I = \pi R^3 t + 2 \left(\frac{t \left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} \cos^2 30 + \left(\frac{at}{2}\right) \times \left(\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \right) = \pi t a^3 + 2 \left(\frac{ta^3}{128} + \frac{27ta^3}{128} \right) = \pi t a^3 + \frac{7}{16} ta^3$$

$$= 3.57ta^3$$

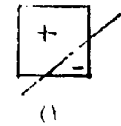
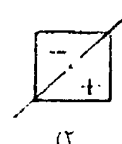
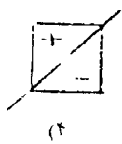
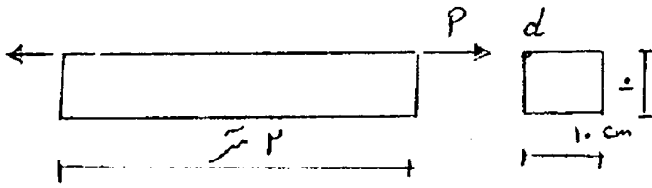
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{Ma}{3.57ta^3} = \frac{0.28M}{ta^2}$$

پاسخ در گزینه‌ها نیست.

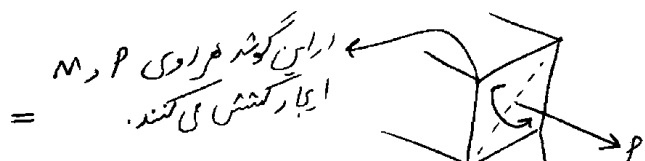
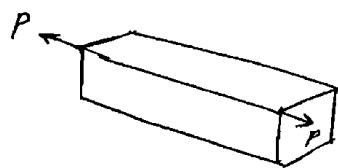
۱۳-۵- ترکیب خمش با نیروی محوری

سراسری ۹۰

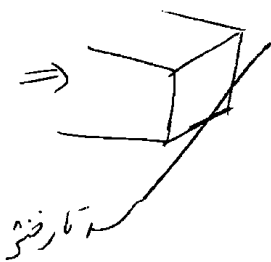
۴۷- تیری مطابق شکل تحت اثر بار کششی P در گوشه بالای سمت چپ (نقطه d) قرار دارد. محور خنثی مقطع کدام گزینه می باشد؟



گزینه ۱

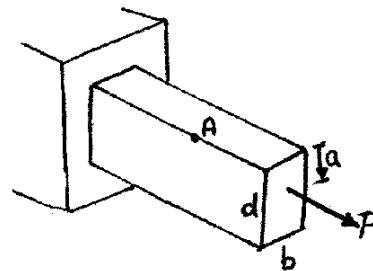


این گوشه فرای P در M ایجاد کشش می کنند.
این گوشه هم کشش ناشی از P داریم و هم فشار ناشی از خمش بنابراین نقطه تنش صفر (تارخشی) در این گوشه نزدیک تر است



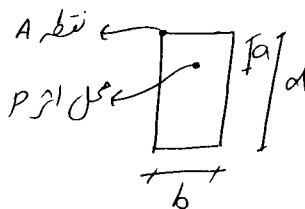
سراسری ۸۹

۴۶- نیروی متمرکز P در عمق a از مقطع تیر نشان داده شده اثر می کند. ارتفاع مقطع را به گونه ای تعیین کنید که تنش در نقطه A حداکثر باشد؟



- b (۱)
- $\frac{2}{3}a$ (۲)
- $\frac{bd}{3a}$ (۳)
- $\frac{2}{3}a$ (۴)

$$\sigma_A = \frac{P}{bd} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{bd} + \frac{[P \times (\frac{d}{2} - a)] d/2}{\frac{bd^3}{12}}$$

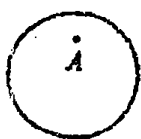


$$= \left(\frac{P}{bd} + \frac{3P}{bd} - \frac{6Pa}{bd^2} \right) \rightarrow \left(\frac{P}{b} \right) \left(\frac{4}{d} - \frac{6a}{d^2} \right)$$

مستوی گیریم $\Rightarrow \frac{-4}{d^2} + \frac{12a}{d^3} = 0 \rightarrow \boxed{d=3a}$

آزاد ۸۹

۵۵- در مقطع دایروی زیر نیروی محوری کششی P در نقطه A به فاصله e از بالای مقطع روی قطر قائم مقطع اعمال شده است. قطر مقطع چقدر باشد تا تنش فشاری در پایین مقطع ماکزیمم شود؟



4.2e (۲)

2.4e (۱)

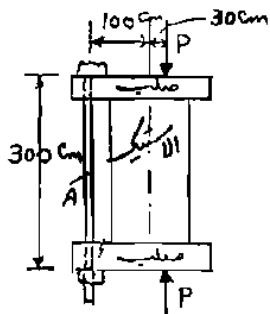
4e (۴)

3e (۳)

گزینه ۴

سراسری ۸۱

۳۳- در دو طرف یک مکعب مستطیل الاستیک دو جسم صلب قرار گرفته و بار $P = 20t$ به اجسام صلب وارد می‌شود. بیج A بطول سه متر و به گام یک میلی‌متر (فاصله دندانه‌ها) مطابق شکل دو جسم صلب را بهم وصل می‌کند. از حالت تماس بدون تنش، مهره را چند دور باید بچاند تا تنش وارد به جسم الاستیک یکنواخت باشد؟ ($E = 2 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ و $A = 5 \text{ cm}^2$ سطح مقطع بیج)



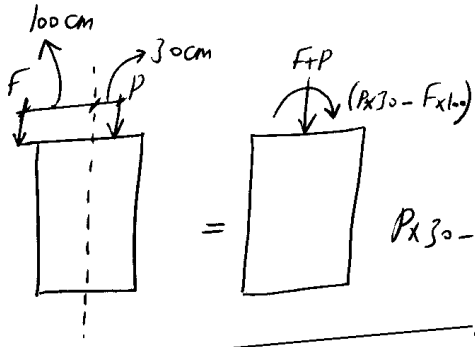
1/2 (۱)

1/8 (۲)

۶ (۳)

(۴) با دوران مهره نمی‌توان تنش در مکعب مستطیل را یکنواخت کرد.

در این مثال چون صفحات تحت الاستیک ران نشده است (در E, A) فرض بر این است که تغییر طول آن در مقایسه با تغییر طول میل A ناچیز است



روش حل: ابتدا از تعادل مقدار F را می یابیم

از آنجا که مقدار گنگر باید صفر باشد (مشکل گفته)

$$P \times 30 - F \times 100 = 0 \rightarrow F = 0.3P = 6 \text{ ton}$$

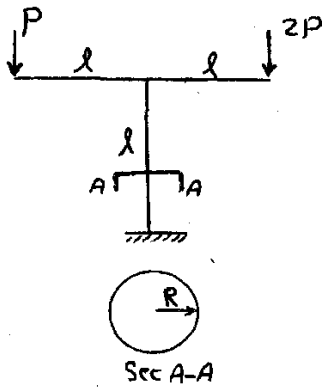
بنابراین بار مشخص گنگر باید میل A به اندازه $F = 6 \text{ ton}$ تحت کشش قرار گیرد

چون ماده رنژندگ (گام سنج) 1mm است

پس باید 1.8 در بر خانیم

$$\Delta_{\text{میل}} = \frac{FL}{EA} = \frac{(6000) \times 300}{2 \times 10^6 \times 5} = 0.18 \text{ cm} = 1.8 \text{ mm}$$

آزاد ۹۲



۵۴- حداکثر تنش عمودی ایجاد شده در تکیه گاه گیردار ستون با مقطع دایره ای نشان داده شده کدام است؟ ($l = 5R$)

۲) $20 \frac{P}{\pi R^2}$

۱) $15 \frac{P}{\pi R^2}$

۴) $36 \frac{P}{\pi R^2}$

۳) $23 \frac{P}{\pi R^2}$

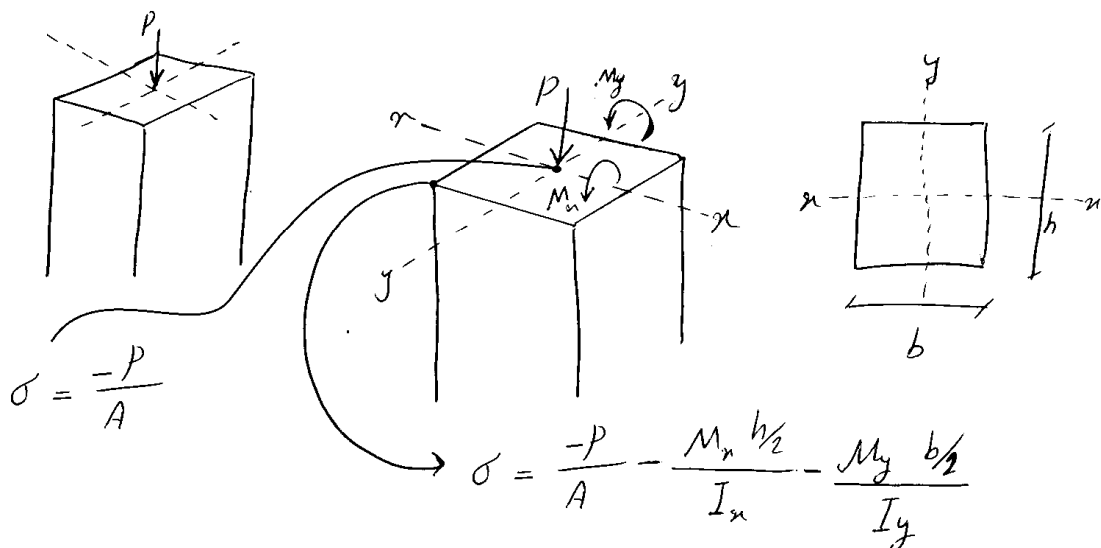
گزینه ۳

ستون تحت اثر فشار و خمش قرار دارد:

$$\left. \begin{matrix} N = 3P \\ M = PL \end{matrix} \right\} \rightarrow \sigma = \frac{N}{A} + \frac{MR}{I} = \frac{3P}{\pi R^2} + \frac{PLR}{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{3P}{\pi R^2} + \frac{20P}{\pi R^2} = \frac{23P}{\pi R^2}$$

۱۳-۶-خمش دو محوره همراه با نیروی محوری

نشی در محوره اگر گزینان $P + M_x + M_y$ را انتخاب کنیم



آزاد ۸۵

۷۶- در یک مقطع مثلثی کرنشهای قائم در گوشه های A و B و C به ترتیب برابر x و $2x-150$ و $1.5x-75$ بر حسب میکرو استرین می باشد. X چندر باشد تا مقطع تحت اثر خمش قرار داشته باشد؟

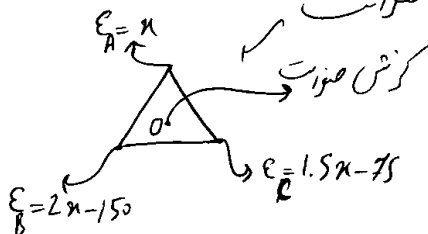
$x \neq 150$ (۱)

$x \neq 50$ (۲)

$x = 50$ (۳)

$x = 150$ (۴)

بازرسی خالص کرنش کمر در تار فشرده صورت است



$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C}{3} = \frac{4.5x - 225}{3} = 0 \rightarrow x = \frac{225}{4.5} = 50$$

تمرین: سراسری ۸۳

۴۱- مقطع یک عضو سازه ای مربع مستطیل مطابق شکل روبرو می باشد. برآیند تنش ها در مقطع یک نیروی عمودی فشاری در A می باشد. قدر مطلق تنش فشاری چند برابر تنش کششی است؟

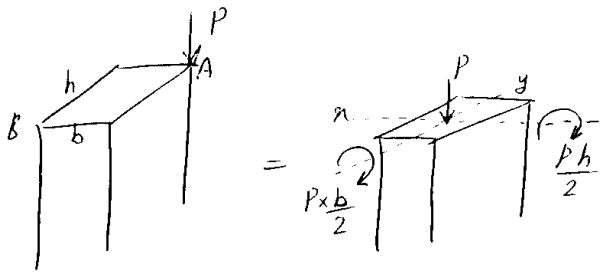


۱/۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱۳/۱۱ (۱)



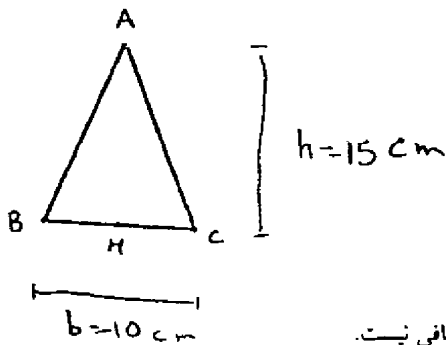
ماکزیم تنش ناشی در نقطه A و تنش کرنش در نقطه B اتفاق می افتد:

$$\sigma_A = \frac{-P}{bh} - \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} - \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{-P}{bh} - \frac{P \cdot h/2}{\frac{bh^2}{6}} - \frac{P \cdot b/2}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{-P}{bh} (1+3+3) = -\frac{7P}{bh}$$

$$\sigma_B = \frac{-P}{bh} + \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \frac{-P}{bh} (1-3-3) = \frac{+5P}{bh} \rightarrow \left| \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \right| = \frac{7}{5} = 1.4$$

آزاد ۸۵

۶۶- در مقطع مثلثی زیر که تحت اثر بار برون محور P قرار دارد کرنشهای قائم در نقاط A و H (وسط BC) به ترتیب برابر $500 \mu m/m$ و $200 \mu m/m$ می باشد. مقدار بار P چقدر است؟



$$(E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2)$$

۴۵ t (۱)

۵۲.۵ t (۲)

۶۰ t (۳)

(۴) برای تحلیل مقطع نیاز به دانستن کرنش در سه نقطه از مقطع می باشد و اطلاعات مسئله کافی نیست.

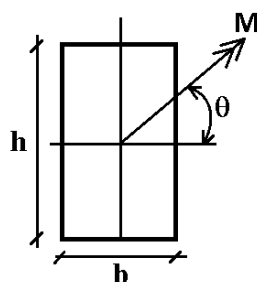
کرنش ناشی از خمش در مرکز سطح صفر است (تار خنثی از مرکز می گذرد). بنابراین مقدار کرنش در وسط تنها ناشی از نیروی محوری خواهد بود:

$$\varepsilon_{center} = \varepsilon_H + \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_H}{3} = 200 + \frac{300}{3} = 300 \mu m$$

$$\sigma_{center} = E \varepsilon_{center} = 2 \times 10^6 \times (300 \times 10^{-6}) = 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

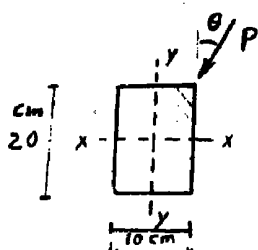
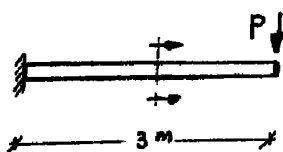
$$P = \sigma_{center} \times A = 600 \times \left(\frac{15 \times 10}{2} \right) = 45000 \text{ kg} = 45 \text{ ton}$$

در یک مقطع لنگر M در چه راستایی وارد شود تا تنش خمشی ماکزیمم شود؟



۵۴- تیر طره‌ای مطابق شکل تحت اثر نیروی متمرکز P تحت زاویه θ مطابق شکل قرار دارد. زاویه θ بین صفر تا 90° تغییر

می‌کند. چنانچه تنش مجاز فشاری و کششی مصالح تیر برابر $200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ باشد، حداکثر مقدار مجاز P چند kg است؟



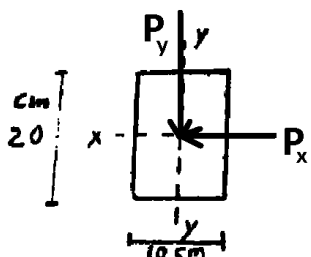
۹۹ (۱)

۲۹۸ (۲)

۱۹۹ (۳)

۳۹۸ (۴)

بدترین حالت بارگذاری: $M=300P$ در راستای قطر وارد شود:

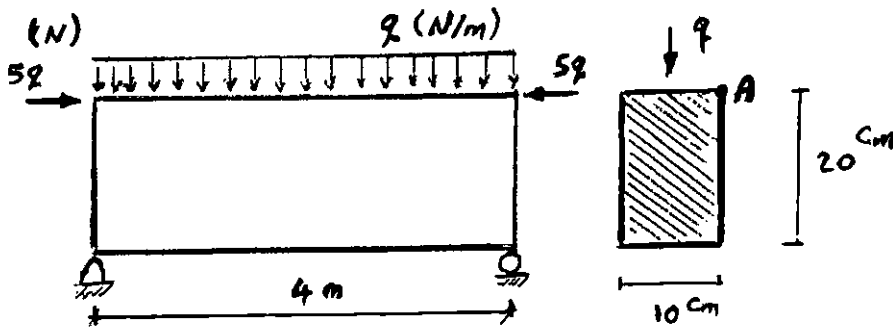


$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{5}} M \\ M_y &= \frac{2}{\sqrt{5}} M \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} M_x &= \frac{300P}{\sqrt{5}} \\ M_y &= \frac{600P}{\sqrt{5}} \end{aligned} \\
 \sigma &= \frac{M_x \times 10}{\frac{10 \times 20^3}{12}} + \frac{M_y \times 5}{\frac{20 \times 10^3}{12}} = \frac{3M_x}{2000} + \frac{3M_y}{1000} = \frac{9P}{20\sqrt{5}} + \frac{18P}{10\sqrt{5}} = P \left(\frac{45}{20\sqrt{5}} \right) \\
 P \left(\frac{45}{20\sqrt{5}} \right) &\leq 200 \rightarrow P \leq 198.76
 \end{aligned}$$

۴۹- تیر دو سر ساده زیر، تحت بار گسترده q در طول عضو و دو بار متمرکز $5q$ که در نقطه A از مقطع تیر وارد می‌شود،

قرار گرفته است. چنانچه تنش مجاز فشاری و کششی مصالح تیر برابر $250 \frac{N}{mm^2}$ باشد، حداکثر مقدار مجاز q چند نیوتن

بر متر است؟



۶۶۵۵ (۱)

۱۵۵۵ (۲)

۱۶۵۵ (۳)

۶۵۵ (۴)

تیر تحت اثر ترکیبی از لنگر و نیروی محوری قرار دارد:

$$\left. \begin{aligned} P &= 5qN \\ M_x &= \frac{qL^2}{8} + 5q \times \frac{h}{2} = \frac{q \times 4^2}{8} + 5q \times 0.1 = 2.5q \text{ N.m} \\ M_y &= 5q \times \frac{b}{2} = 5q \times 0.05 = .25q \text{ N.m} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sigma = \frac{P}{A} + \frac{6M_x}{bh^2} + \frac{6M_y}{b^2h}$$

$$\sigma = \frac{5q}{0.1 \times 0.2} + 6 \frac{2.5}{0.1 \times 0.2^2} + 6 \frac{0.25}{0.1^2 \times 0.2} = 250q + 3750q + 750q = 4750q \frac{N}{m^2}$$

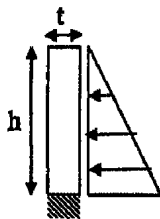
$$= 4.750q \times 10^{-3} \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma < 250 \rightarrow 4.750q \times 10^{-3} < 250 \rightarrow q < 52.632 \frac{N}{mm} \rightarrow q < 52632 \frac{N}{m}$$

پاسخ در گزینه ها نیست.

۴۹- دیوار بتنی به عرض ثابت، تحت فشار هیدرواستاتیک قرار داد. حداقل ضخامتی که دیوار بتنی داشته باشد تا تنش

کششی در هیچ نقطه پایه دیوار تشکیل نشود چقدر است؟ وزن مخصوص γ_w و بتن γ_c



$$t = h \frac{\sqrt{3\gamma_w}}{\gamma_c} \quad (۲) \quad t = h \frac{\sqrt{3\gamma_w}}{\gamma_c} \quad (۱)$$

$$t = h \frac{\sqrt{\gamma_w}}{\gamma_c} \quad (۳) \quad t = h \frac{\sqrt{\gamma_w}}{\gamma_c} \quad (۴)$$

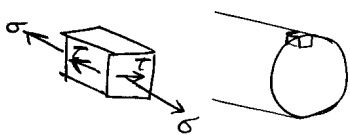
سراسری ۸۵

۵۱- به میله‌ای به مقطع دایره لنگر پیچشی T و لنگر خمشی M وارد می‌شود بطوریکه $M = \frac{T}{2}$. اگر لنگر پیچشی نصف شود و لنگر

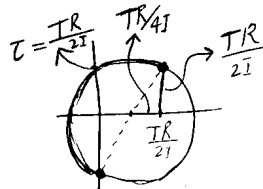
خمشی دو برابر گردد τ_{max} در میله چه تغییری می‌کند؟

- (۱) تغییری نمی‌کند. (۲) $\sqrt{5}$ برابر می‌شود. (۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ برابر می‌شود. (۴) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ برابر می‌شود.

حالت اول:



$$\begin{cases} \tau = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{2I} \\ \sigma = \frac{(M = \frac{T}{2})R}{I} = \frac{TR}{2I} \end{cases}$$

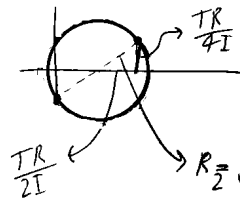


$$\tau_{max} = R_1 = \sqrt{\left(\frac{TR}{2I}\right)^2 + \left(\frac{TR}{4I}\right)^2}$$

حالت دوم:

بنابر این τ_{max} تغییری کند

$$\begin{cases} \tau = \left(\frac{T}{2}\right) \frac{R}{J} = \frac{TR}{4I} \\ \sigma = \frac{(2M = T)R}{I} = \frac{TR}{I} \end{cases}$$

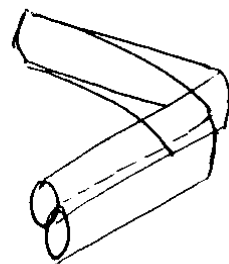
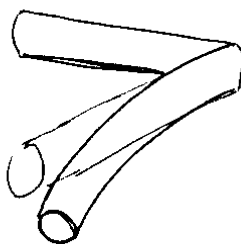
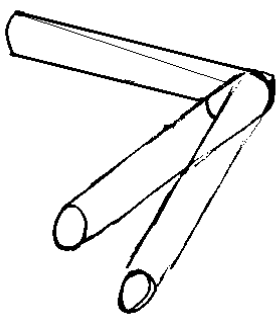
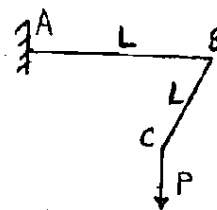


$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{TR}{4I}\right)^2 + \left(\frac{TR}{2I}\right)^2}$$

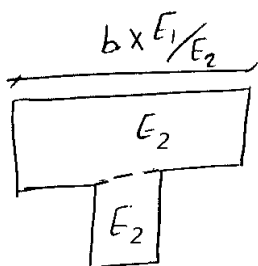
۴۴- در شکل روبرو ABC در صفحه افق است و P قائم می‌باشد. AB و BC میله‌هایی یکسان به مقطع دایره می‌باشند. اگر

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$ باشد. تغییر مکان نقطه C برابر است با:

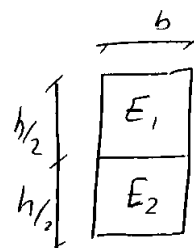
- $\frac{PL^2}{EI}$ (۱)
- $\frac{\sqrt{2}PL^2}{EI}$ (۲)
- $\frac{9\sqrt{2}PL^2}{EI}$ (۳)
- $\frac{5\sqrt{2}PL^2}{EI}$ (۴)



۱۳-۸-مقاطع مرکب

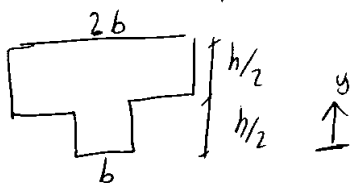


تبدیل

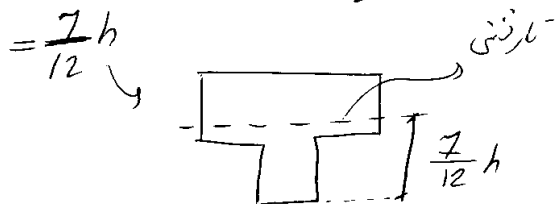


عصر مرکب

پس از تبدیل تارتنی را با $E_1 = 2E_2$ بنویسید و خواهیم داشت:



$$\bar{y} = \frac{(2b \times h/2) \times \frac{3h}{4} + (b \times h/2) \times h/4}{2b \times \frac{h}{2} + b \times \frac{h}{2}}$$



$$\sigma_{top} = \left[\frac{M \times \frac{5}{12}h}{I} \right] \times 2$$

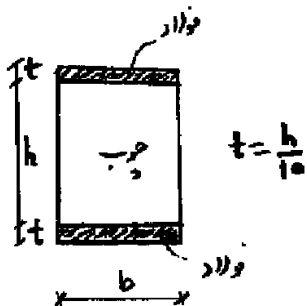
$$\sigma_{bot} = \left[\frac{M \times \frac{7}{12}h}{I} \right] \times 1$$

سوال: تنش در اثر M در تار با لایه‌های مختلف؟
 پس از محاسبه تنش در مقطع تبدیل یافته
 باید آن را به نسبت تبدیل تعدیل کرد
 $\times \frac{E_1}{E_2}$

۸- تیری از جنس چوب با مقطع مستطیلی شکل با دو ورق فولادی در بالا و پایین مطابق شکل تقویت شده است. چنانچه نسبت

مدول ارتجاعی فولاد به چوب $\frac{E_s}{E_w} = 20$ باشد، نسبت حداکثر تنش خمشی ایجاد شده در فولاد به حداکثر تنش خمشی

ایجاد شده در چوب چقدر است؟



۲۰ (۱)

۲۲ (۲)

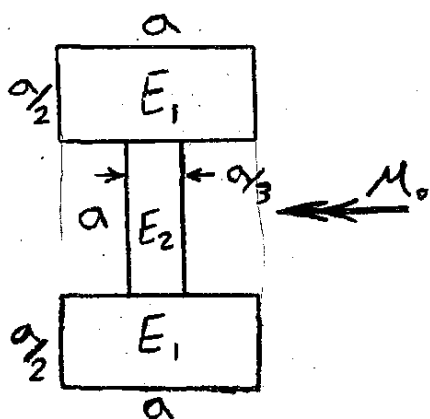
۲۴ (۳)

۲۶ (۴)

آزاد ۹۲

۵۶- حداکثر تنش خمشی ناشی از لنگر M_0 اعمال شده به مقطع

غیرهمگن مقابل کدام است؟ ($E_2 = 3E_1$)



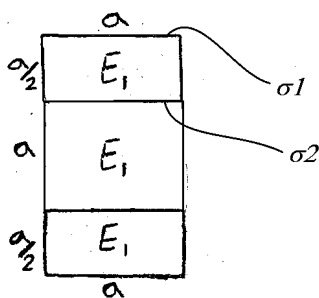
$\frac{4 M_0}{9} \frac{1}{a^3}$ (۲)

$\frac{3 M_0}{2} \frac{1}{a^3}$ (۱)

$\frac{9 M_0}{4} \frac{1}{a^3}$ (۴)

$\frac{2 M_0}{3} \frac{1}{a^3}$ (۳)

گزینه ۴. مقطع تبدیل یافته به صورت زیر خواهد بود و تنشها برابرند با:

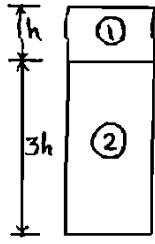


$$\sigma_1 = \frac{M_0 a}{\frac{a \times (2a)^3}{12}} = \frac{3 M_0}{2 a^3}$$

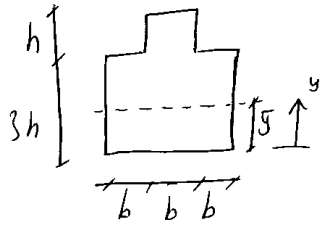
$$\sigma_2 = 3 \times \frac{M_0 \left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a \times (2a)^3}{12}} = \frac{9 M_0}{4 a^3}$$

بنابراین تنش ماکزیمم برابر $\frac{9 M_0}{4 a^3}$ می باشد.

۵۹- تیر مرکبی یا مقطع نشان داده شده تحت اثر معان خمشی منفی قرار گرفته است. هر گاه $E_2 = 3E_1$ باشد نسبت بیشترین تنش کششی به بیشترین تنش فشاری چقدر است؟



- ۰.۲۶(۱)
- ۰.۱۶۵(۲)
- ۰.۱۴۵(۳)
- ۱/۳۵(۴)

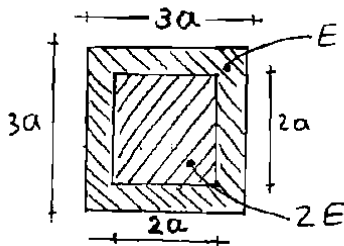


$$\bar{y} = \frac{\frac{A_1}{h} \times 3.5h + \frac{A_2}{(3h)} \times 1.5h}{\frac{hb}{A_1} + \frac{(3h)(3b)}{A_2}} = \frac{17h}{10}$$

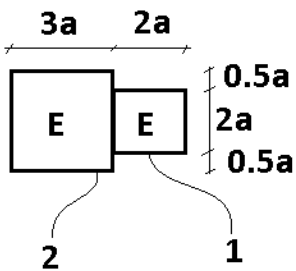
چون نسبت تنش σ را خواسته نیازی به مابعد I نیست چون I حذف می شود

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{top})_1 &= \frac{M(4h - \frac{17h}{10})}{I} \\ (\sigma_{top})_2 &= 3 \frac{M(3h - \frac{17h}{10})}{I} \end{aligned} \right\} \sigma_{\text{کشش حداکثر}} = \frac{39Mh}{10I} \quad \sigma_{\text{فشاری}} = 3 \frac{M(\frac{17h}{10})}{I} = \frac{51Mh}{10I} \quad \frac{\sigma_{\text{کشش}}}{\sigma_{\text{فشاری}}} = \frac{39}{51} = 0.76$$

۳۸- در تیر مرکب شکل زیر چنانچه حداکثر تنش مجاز برای هر دو نوع مصالح مساوی σ_0 باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز چقدر است؟



- ۱) $\frac{8}{97} a^3 \sigma_0$
- ۲) $\frac{6}{97} a^3 \sigma_0$
- ۳) $\frac{8}{81} a^3 \sigma_0$
- ۴) $\frac{6}{81} a^3 \sigma_0$



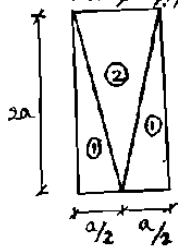
$$I = \frac{(3a)^4}{12} + \frac{(2a)^4}{12} = \frac{97}{12} a^4$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \left(\frac{M \times a}{I} \right) = \frac{24M}{97a^3} \\ \sigma_2 &= \frac{M \times 1.5a}{I} = \frac{18Ma}{97a^3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{تنش در 1 بیشتر از 2 است} \rightarrow M = \frac{97a^3 \sigma_1}{24}$$

پاسخ در گزینه ها نیست.

سراسری ۸۲

۴۲- در یک تیر با مقطع مقابل، اگر مدول الاستیسته ناحیه ۲ مقطع را دو برابر کنیم، تغییر شکل حداکثر چند برابر خواهد شد؟



- ۰,۶۶۷ (۱)
- ۰,۶۹۲ (۲)
- ۰,۷۴۵ (۳)
- ۰,۵ (۴)

با توجه به روابطی مانند $\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$ ، خیز با EI رابطه عکس دارد. بنابراین باید ممان اینرسی معادل مقطع را در دو حالت محاسبه کرده و مقایسه کنید:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{I(\text{rectangle})}{I(\text{rectangle} + \text{triangle})}$$

برای محاسبه I2 ابتدا باید مرکز سطح مقطع معادل را محاسبه کنیم:

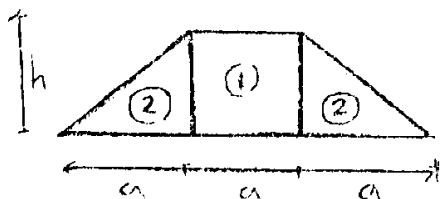
$$\bar{y} = \frac{\left(\frac{a \times 2a}{2}\right) \times \frac{2(2a)}{3} + (a \times 2a) \times a}{\left(\frac{a \times 2a}{2}\right) + (a \times 2a)} = \frac{10a}{9}$$

$$I_2 = \left[\frac{a \times (2a)^3}{12} + (a \times 2a) \times \left(\frac{a}{3}\right)^2 \right] + \left[\frac{a \times (2a)^3}{36} + \left(\frac{a \times 2a}{2}\right) \times \left(\frac{2(2a)}{3} - \frac{10a}{9}\right)^2 \right] = \frac{26}{27} a^4$$

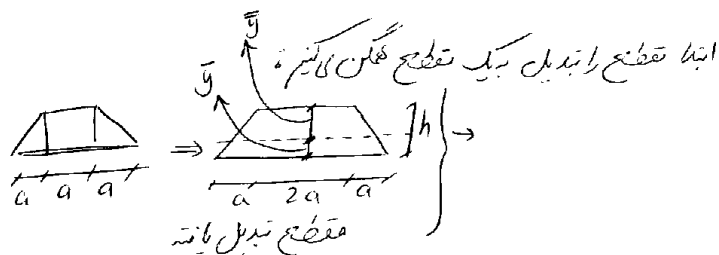
$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2a^4}{3} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1} &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{26}{27}\right)} = \frac{9}{13} = 0.692 \end{aligned} \right\}$$

آزاد ۹۰

۵۵- نسبت بیشترین کرنش کششی به بیشترین کرنش فشاری در مقطع غیرهمگن نشان داده شده که تحت اثر لنگر خمشی منفی قرار دارد کدام است؟ ($E_1 = 2E_2$)



- ۱ (۱)
- $\frac{5}{4}$ (۲)
- $\frac{1}{3}$ (۳)
- $\frac{1}{2}$ (۴)



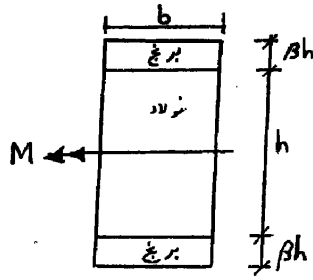
$$\bar{y} = \frac{(2ah) \times \frac{h}{2} + \left(\frac{ah}{2}\right) \times 2 \times \frac{h}{3}}{2ah + \left(\frac{ah}{2}\right) \times 2} = \frac{h + \frac{h}{3}}{2+1} = \frac{4h}{9}$$

$$\bar{\bar{y}} = h - \bar{y} = \frac{5h}{9}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_t}{\epsilon_c} &= \frac{\bar{\bar{y}}}{\bar{y}} = \frac{5}{4} \end{aligned} \right\}$$

تمرین: سراسری ۹۰

۴۹- مقطع تیر مرکبی که از برنج و فولاد تشکیل شده است تحت لنگر خمشی M قرار می‌گیرد. مقدار β چقدر باشد تا حداکثر تنش نرمال در فولاد با حداکثر تنش نرمال در برنج یکسان شود؟ ($\frac{E_g}{E_b} = 2$ ، E_g = مدول الاستیسیته فولاد، E_b = مدول الاستیسیته برنج)

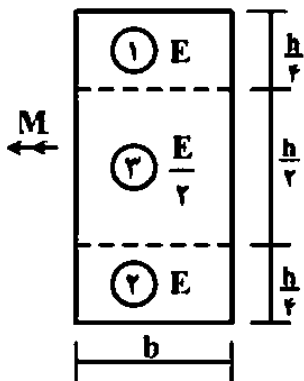


- مدول الاستیسیته برنج)
- ۱/ ۱ (۱)
 - ۲/ ۴ (۲)
 - ۳/ ۳ (۳)
 - ۴/ ۵ (۴)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{فولاد}} &= 2 \left(\frac{M \frac{h}{2}}{I} \right) \\ \sigma_{\text{برنج}} &= \frac{M \times (\frac{h}{2} + \beta h)}{I} \end{aligned} \right\} 2 \left(\frac{M \frac{h}{2}}{I} \right) = \frac{M \times (\frac{h}{2} + \beta h)}{I} \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

۱- در تیری با مقطع مرکب مطابق شکل، تحت بارگذاری نشان داده شده، نسبت مدول مقطع الاستیک

آن به مدول مقطع تیر دیگری به عرض b ، ارتفاع h و مدول ارتجاعی یکنواخت E کدام است؟ $(S = \frac{M}{\sigma_{max}})$

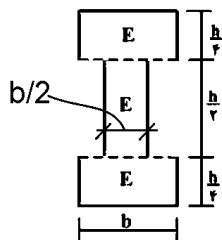


- ۱ (۱)
۷/۸ (۲)
۸/۷ (۳)
۱۵/۱۶ (۴)

گزینه ۴

قسمت میانی سختی کمی دارد. شکل زیر مقطع مرکب را پس از معادل سازی نشان میدهد (پس از معادل سازی در کل مقطع E ثابت است):

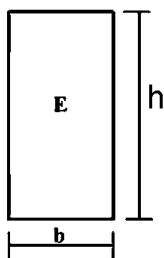
برای محاسبه ممان اینرسی می توان از یک مستطیل کامل، مستطیل داخلی را کم کرد:



$$I_1 = \frac{bh^3}{12} - \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{15}{16} \times \frac{bh^3}{12} \rightarrow S_1 = \frac{I_1}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{15}{16} \times \frac{bh^2}{6}$$

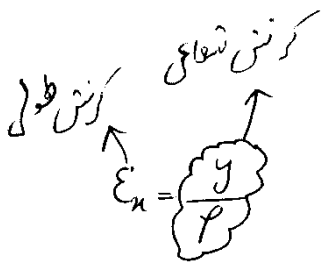
مقطع معادل

اگر مدول مقطع (E) یکنواخت باشد:

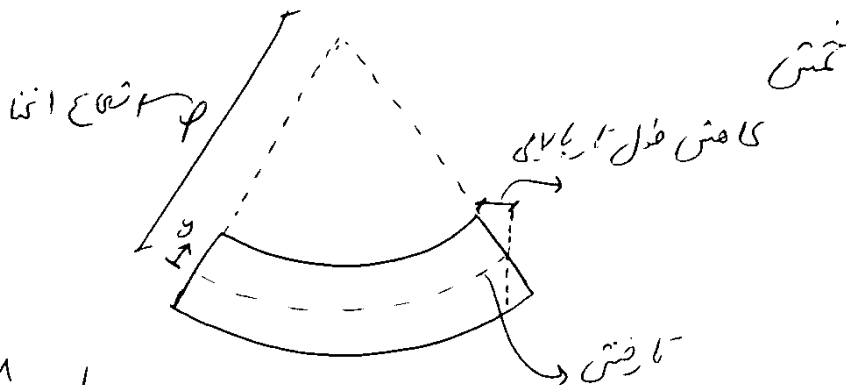


$$I_2 = \frac{bh^3}{12} \rightarrow S_2 = \frac{I_2}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{bh^2}{6}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{15}{16}$$



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{y}{\rho} E \\ \sigma_x &= \frac{My}{I} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

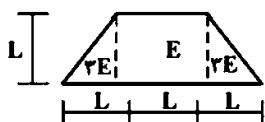


شکل
کاهش طول تارهای بالا
تأخیر
شعاع انحنا: ρ هر چه کمتر شود به معنی افزایش لنگر M است
انحنا: $\frac{1}{\rho}$

نکته: در هر قسمتی از تیر مقدار لنگر ثابت است ρ ثابت خواهد بود و تغییر شکل تیر به صورت کمانی از رابره خواهد بود

دکتری ۹۶

۴- مقطع غیرهمگن مطابق شکل تحت اثر لنگر خمشی مثبت قرار دارد. نسبت حداکثر کرنش کششی به حداکثر کرنش فشاری کدام است؟



- ۱) $\frac{1}{5}$
- ۲) $\frac{2}{5}$
- ۳) $\frac{3}{5}$
- ۴) $\frac{4}{5}$
- ۵) $\frac{5}{5}$

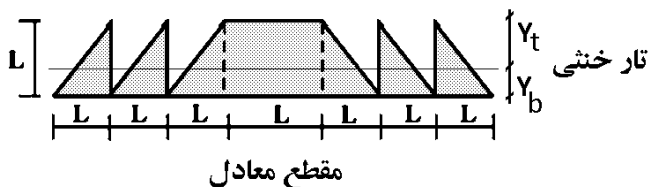
گزینه ۳

$$Y_b = \frac{L^2 \times \frac{L}{2} + 6 \left(\frac{L^2}{2} \times \frac{L}{3} \right)}{L^2 + 6 \left(\frac{L^2}{2} \right)} = \frac{3}{8}L \quad \rightarrow \quad Y_t = \frac{5}{8}L$$

حرکت (و کرنش تارها) بستگی به فاصله آنها از تار خنثی دارد. هر نقطه ای که از تار خنثی دورتر باشد، کرنش بیشتری دارد. با توجه به مثبت بودن خمش، تارهای پایین تحت کشش خواهند بود:

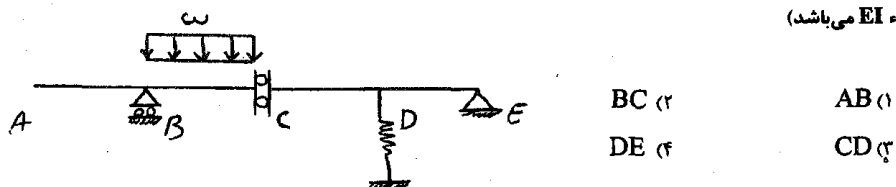
$$\frac{\epsilon_{\text{کششی}}}{\epsilon_{\text{فشاری}}} = \frac{Y_{\text{bot}}}{Y_{\text{top}}} = \frac{3}{5}$$

• در مقطع معادل مساحت قسمت هایی که $3E$ هستند، سه برابر شده است:

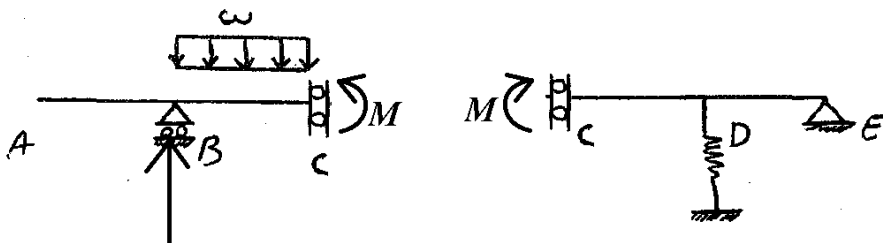


آزاد ۹۲

۵۷- در کدام قسمت از تیر نشان داده شده نمودار تغییر شکل سازه به صورت کمائی از دایره می باشد؟ (صلبیت خمشی اعضاء EI می باشد)

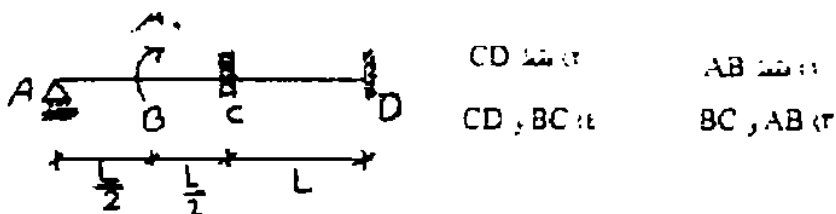


گزینه ۳: تغییر شکل سازه تنها در نقاطی که مقدار لنگر در طول تیر ثابت باشد، به صورت کمائی از دایره خواهد بود. دیاگرام لنگر در نقاطی ثابت است که برش در آن عضو صفر باشد. با توجه به شکل زیر تنها در عضو CM خمش ثابت (و برش صفر) داریم.

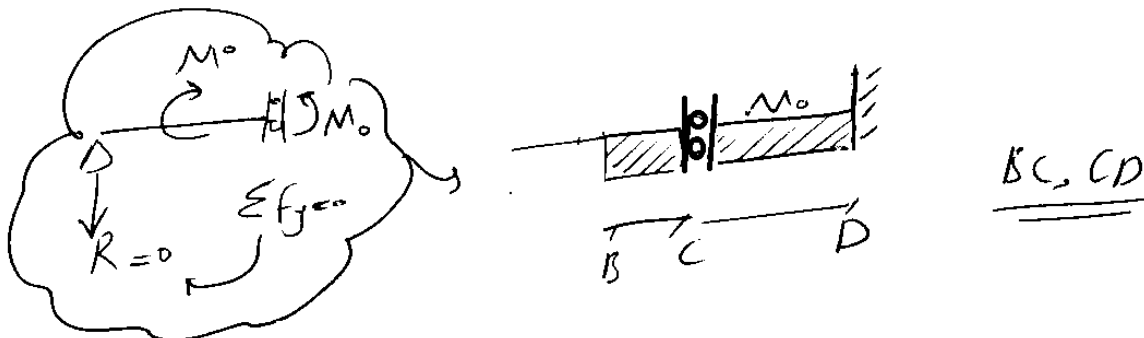


آزاد ۸۷

منحنی تغییر شکل نشان داده شده در کدام قسمت به صورت کمائی از دایره است؟



گزینه ۴: هر جا که لنگر ثابت باشد، شعاع انحنا نیز ثابت خواهد بود و تغییر شکل به صورتی از کمان دایره خواهد بود. دیاگرام لنگر نیز به صورت زیر است:



دقت شود که لنگر در نقاطی ثابت است که بر صفر باشد. عکس العمل تکیه گاه A صفر است و بنابراین برش در کل طول تیر صفر خواهد بود.

آزاد ۸۳

۲۱- یک صفحه فولادی به عرض ۱۲cm و ضخامت ۲cm را تحت اثر خمش محض بصورت قوسی اولدایره به شعاع ۱۰m خم می کنیم. تنش خمشی ماکزیمم صفحه چقدر است؟ ($E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)

- ۱) 1000 kg/cm^2
- ۲) 500 kg/cm^2
- ۳) 2000 kg/cm^2
- ۴) 1500 kg/cm^2

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow \sigma = \frac{1}{1000} \times c \times E = \frac{1 \times 2 \times 10^6}{1000} = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

۵۴- تغییر شکل تیر روبرو چنان است که انحنای آن متناسب با طول تغییر می‌کند یعنی $\frac{1}{\rho} = kx$. بار وارد بر تیر چیست؟



(۱) بار متمرکز در انتهای آزاد

(۲) لنگر متمرکز در انتهای آزاد

(۳) بار گسترده در سرتاسر تیر با شدت یکنواخت

(۴) بار گسترده خطی با شدت صفر در انتهای آزاد

$$\frac{1}{\rho} = kx \rightarrow \frac{M}{EI} = kx \Rightarrow M = (kEI)x \Rightarrow \text{بار گسترده خطی} \Rightarrow$$

و این دیاگرام مربوط به یک بار متمرکز در انتهای تیر است.

۶۳- اگر در انتهای تیر کنسول به طول l جابه‌جایی قائم بر اثر بار متمرکز قائم در انتها برابر Δ باشد، انحنای حداکثر ایجاد شده در تیر چقدر می‌باشد؟ $\Delta = 0/01$ است.

(۴) $\frac{0/03}{1}$

(۳) $\frac{0/01}{1}$

(۲) $\frac{0/01}{31}$

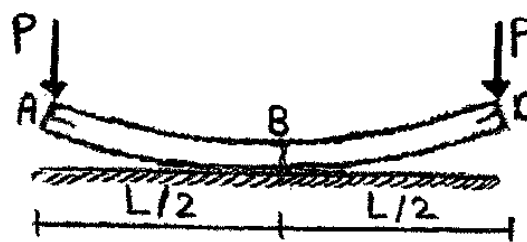
(۱) $\frac{0/01}{61}$

انحنای حداکثر در محل لنگر حداکثر ایجاد می‌شود:

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{R} \rightarrow \frac{PL}{EI} = \frac{l}{R}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \rightarrow \frac{PL^3}{3EI} = 0.01L \rightarrow \frac{PL}{EI} = \frac{0.03}{L} \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{0.03}{L}$$

۵۵- در تیر مورد نظر انحنای اولیه آن بدون بار در نقطه B برابر با R_1 می‌باشد. مقدار نیروی لازم P چقدر باشد تا انحنای در B صفر شود؟



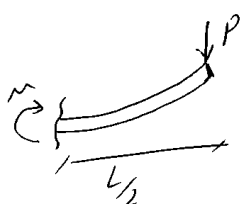
(۱) $\frac{Ebh^3}{6LR_1}$

(۲) $\frac{Ebh^3}{12LR_1}$

(۳) $\frac{Ebh^3}{3LR_1}$

(۴) $\frac{Ebh^3}{24LR_1}$

شعاع انحنای اولیه R_1 است. پس باید در نقطه B ما انحنای $-R_1$ ایجاد نماییم و برای این کار باید لنگر ایجاد شده در B برابر $M = -\frac{EI}{R_1}$ باشد.

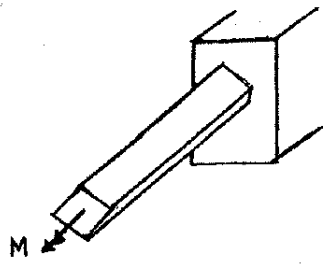


$$-P \times \frac{L}{2} = -\frac{EI}{R} \rightarrow P = \frac{2EI}{LR} = \frac{2Ebh^3/12}{LR_1} \rightarrow P = \frac{Ebh^3}{6LR_1}$$

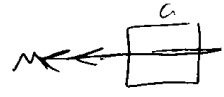
۴۷- چنانچه اضلاع مقطع چهارگوش مربع شکل برابر a باشد، انحنای ایجاد شده در اثر لنگر M را محاسبه کنید. (مدول ارتجاعی مقطع E می باشد).

$$\frac{12M}{Ea^3} \quad (۳) \quad \frac{3a^2M}{AE} \quad (۱)$$

$$\frac{\Delta Ea^3}{12M} \quad (۴) \quad \frac{\Delta M}{12Ea^3} \quad (۲)$$

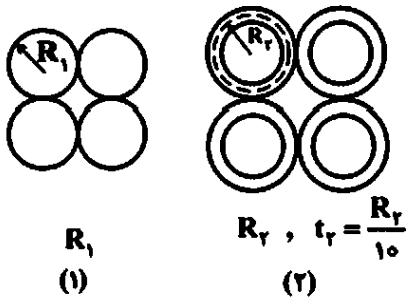


دقت شود که خمش حول محور افقی مربع است نه حول قطر آن:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{M}{E \left(\frac{a^2 a^3}{12} \right)} = \frac{12M}{Ea^4}$$


۲۱- در شکل زیر، مقاطع (۱) و (۲) به ترتیب از چهار مقطع دایروی توپر و چهار لوله تشکیل شده است. برای آنکه شعاع انحنای حداکثر هر دوی آنها زیر اثر بارگذاری مشابه در یک تیر یکسان باشد، R_1 باید باشد؟

(جنس مصالح یکسان است)



$$\sqrt[4]{\frac{1}{5}} \quad (۱)$$

$$\sqrt[4]{\frac{25}{6}} \quad (۲)$$

$$\sqrt[4]{5} \quad (۳)$$

$$\sqrt[4]{5\pi} \quad (۴)$$

شعاع انحنای از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

با توجه به اینکه بارگذاری (و در نتیجه M) مشابه می باشد، برای یکسان شدن شعاع انحنای باید ممان اینرسی دو مقطع برابر باشد:

$$\rho_I = \rho_{II} \quad \rightarrow \quad I_I = I_{II}$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 4 \left(\frac{\pi R_1^4}{4} + \pi R_1^2 \times R_1^2 \right) \\ I_2 &= 4(\pi R_2^3 t + 2\pi R_2 t \times R_2^2) \end{aligned} \right\} \quad I_I = I_{II} \quad \rightarrow \quad 5R_1^4 = 12R_2^3 t \quad \xrightarrow[t=\frac{R_2}{10}]{} \quad 5R_1^4 = 1.2R_2^4$$

$$\rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \sqrt[4]{\frac{5}{1.2}} = \sqrt[4]{\frac{25}{6}}$$

آزاد ۸۹

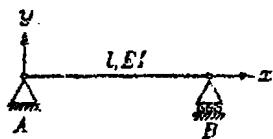
۵۴- تغییر مکان تیر زیر تحت اثر بارگذاری ۱ بصورت $y(x) = \frac{M}{6EI}(x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)$ و تحت اثر بارگذاری ۲ بصورت

$y(x) = \frac{M}{6EI}(x^3 - l^2x)$ می باشد. اگر بارگذاریهای ۱ و ۲ بصورت همزمان بر تیر AB وارد شود انحنای وسط تیر چقدر

خواهد شد؟

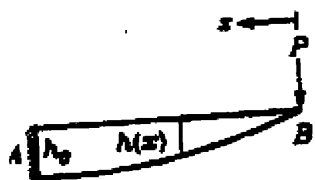
$\frac{M}{EI}$ (۲) $\frac{2M}{EI}$ (۱)

$\frac{M}{2EI}$ (۱) ۰ (۲)



آزاد ۸۸

۵۵- تیر طره زیر تحت اثر بار P بصورت یک قوس دایره خم می شود. معادله $h(x)$ (ارتفاع مقطع) کدام است؟



$h(x) = h_0 \left(\frac{x}{l}\right)$ (۱)

$h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{l}}$ (۲)

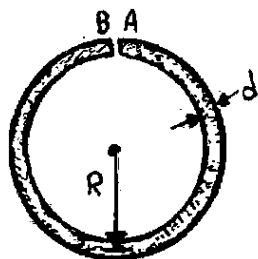
$h(x) = h_0 \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$ (۳)

$h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{l}}$ (۴)

$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{Px}{E(bh^3/12)} = \frac{PL}{Ebh^3/12} \rightarrow \frac{x}{h^3} = \frac{L}{h^3} \rightarrow h = h_0 \sqrt[3]{\frac{x}{L}}$

سراسری ۸۵

۴۱- یک سیم ممسی به قطر d به شکل یک دایره به گونه ای خم شده است که دو انتهای آن درست در تماس با یکدیگر نگه داشته شده اند. در صورتی که حداکثر کرنش مجاز مس ε باشد، کمترین طول (L) مورد نیاز برای این حالت برابر است با:



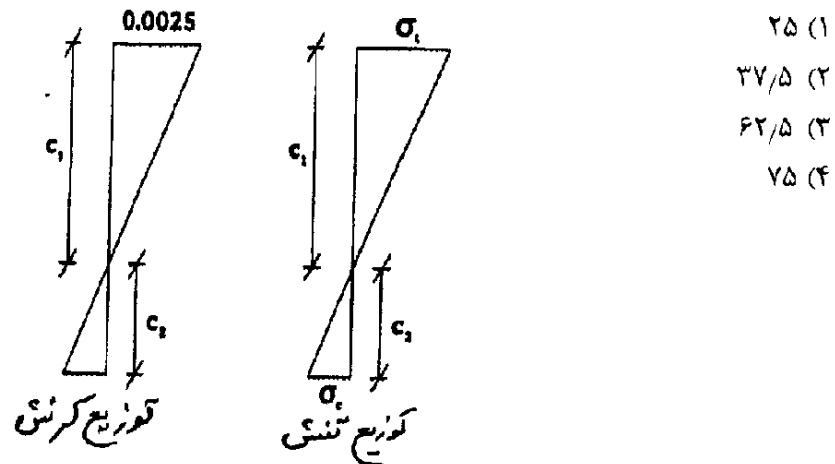
$\frac{\pi d}{2\epsilon}$ (۱)

$\frac{\pi d}{\epsilon}$ (۲)

$\frac{7\pi d}{\epsilon}$ (۳)

$\frac{7\pi d}{\epsilon}$ (۴)

۵۵- در یک مقطع با لنگر منفی، حداکثر کرنش مثبت، 0.0025 است. چنانچه مقاومت مصالح در کشش دو برابر حالت فشار باشد و شعاع انحناء 100 متر فرض شود، ارتفاع بهینه مقطع چند سانتی متر است؟



گزینه ۲

تمامی پارامترهای "تنش خمشی"، "کرنش"، "شعاع انحناء" بستگی به "لنگر" وارد شده دارند.

رابطه بین "لنگر" و "تنش خمشی":

$$\sigma_t = \frac{Mc_1}{I}$$

$$\sigma_c = \frac{Mc_2}{I}$$

در حالت بهینه مقطع تحت کشش و فشار همزمان خراب می شود:

$$\sigma_t = 2\sigma_c \quad \rightarrow \quad \frac{Mc_1}{I} = 2\frac{Mc_2}{I} \quad \rightarrow \quad c_1 = 2c_2$$

رابطه بین "لنگر" و "شعاع انحناء" و "کرنش":

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{M}{EI} \\ \varepsilon_{\text{top}} &= \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc_1}{EI} \end{aligned} \right\} \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_{\text{top}}}{c_1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{100} = \frac{0.0025}{c_1} \quad \rightarrow \quad c_1 = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

$$c_1 = 2c_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 25 \text{ cm} \\ c_2 = 12.5 \text{ cm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad h = c_1 + c_2 = 37.5 \text{ cm}$$

۵۴- در یک مقطع تحت لنگر خمشی مثبت، کرنش در تار بالایی مقطع برابر با 2×10^{-4} می باشد اگر شعاع انحناء مقطع ۳۰۰ متر و تنش مجاز کششی ۲ برابر تنش مجاز فشاری باشد، ارتفاع بهینه مقطع کدام است؟

۱۶ cm (۲)

۱۲ cm (۱)

۲۰ cm (۴)

۱۸ cm (۳)

گزینه ۳

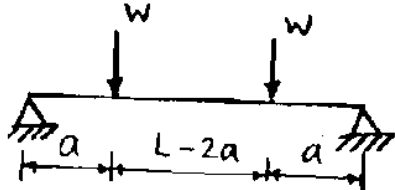
اگر فاصله تار بالایی از تار خنثی را برابر y در نظر گیریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{300} = \frac{M}{EI} \\ \varepsilon_{\text{top}} &= \frac{\sigma}{E} = \frac{My}{EI} = 0.0002 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 300 \times 0.0002 = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

با توجه به اینکه تنش مجاز کششی دو برابر تنش مجاز فشاری می باشد. جهت بهینه شدن باید ارتفاع کششی دو برابر ارتفاع فشاری باشد. در این صورت ارتفاع کل مقطع ۱۸cm خواهد بود (۶cm فشاری و ۱۲cm کششی)

تمرین: سراسری ۸۳

۵۱- در تیر متعارف شکل زیر، دقیقترین منحنی که می تواند تغییر شکل تیر را ما بین دو نیروی متمرکز W نشان دهد، کدام است؟



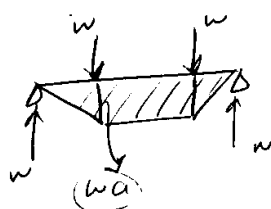
$$EI = \text{ثابت}$$

(۱) دایره

(۲) خط

(۳) منحنی درجه ۲

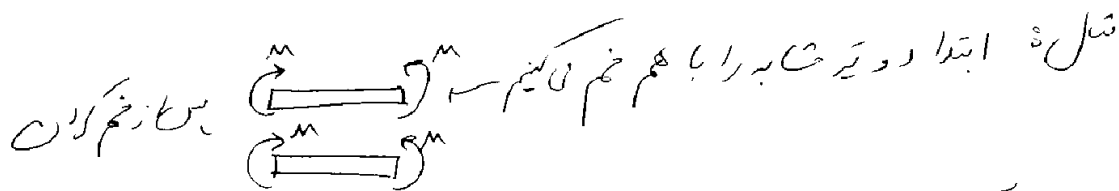
(۴) بیضی با فاصله کانونی کم



مقدار M ثابت است - رابره خواهد بود

نکته: اگر گنگرک مختلف به تیر وارد شوند و نتیجه نهایی خواسته شود، به جای جمع گنگرک

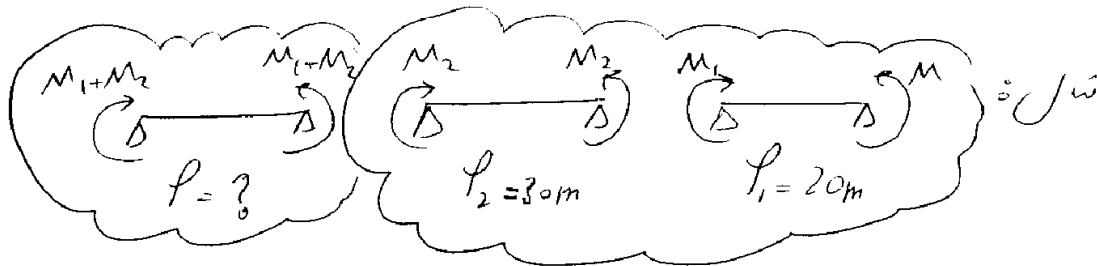
می‌توان $\frac{1}{\phi}$ را با هم جمع کرد (به ویژه اگر EI در طاقان مختلف تغییر نکند)



حال اگر گنگرک $2M$ را حذف کنیم (با در برابریم) چه ϕ جدیدی؟

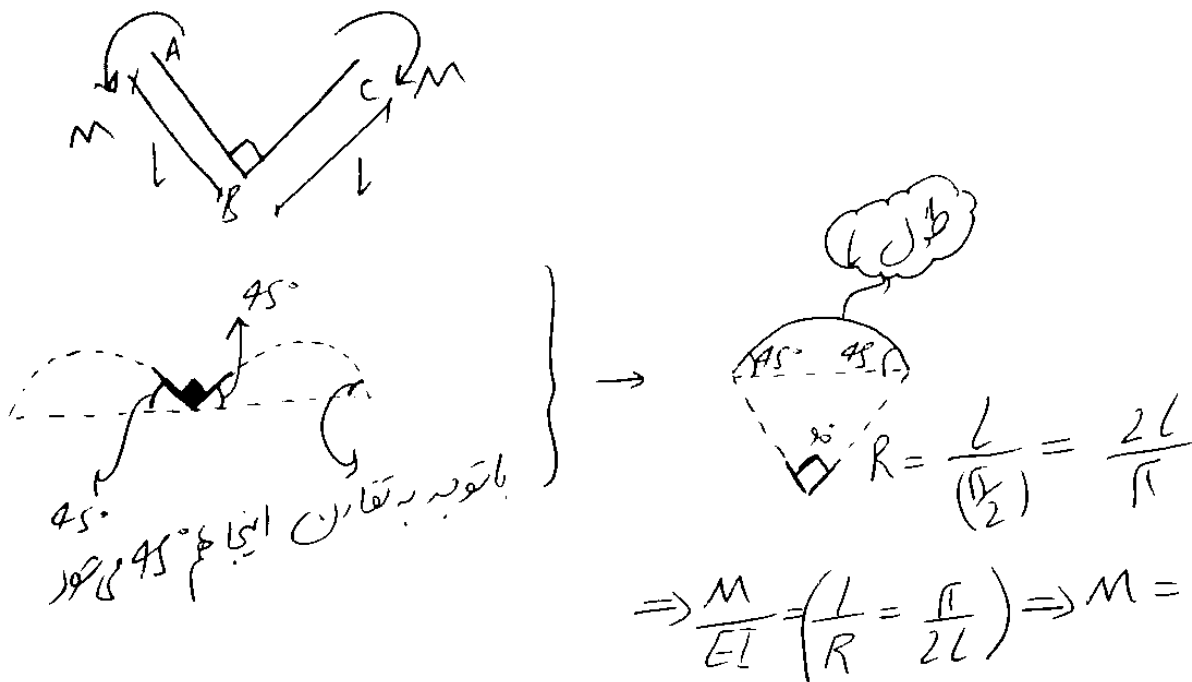
مقاطع مستطین هستند

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\phi_1} &= \frac{M}{EI_1} \\ \frac{1}{\phi_2} &= \frac{-2M}{E(2I_1)} = \frac{-M}{4EI_1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2} = \frac{M}{EI_1} - \frac{M}{4EI_1} = \frac{3}{4\phi}$$



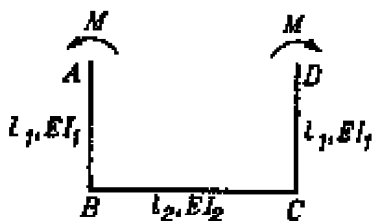
$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \rightarrow \phi = 12m$$

مثال: مقدار M چقدر باشد تا نقاط A, B, C در یک امتداد قرار گیرند؟



آزاد ۸۶

۵۳- در قاب زیر مقدار لنگر خمشی M چقدر باشد تا A, B, C و D در یک امتداد قرار گیرند؟

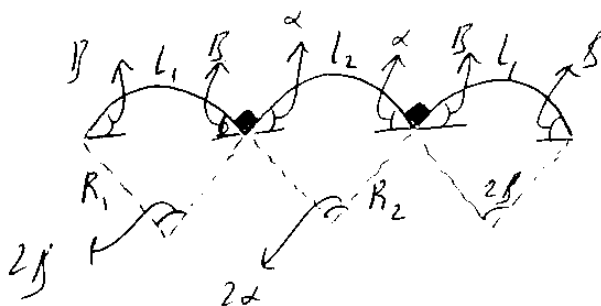
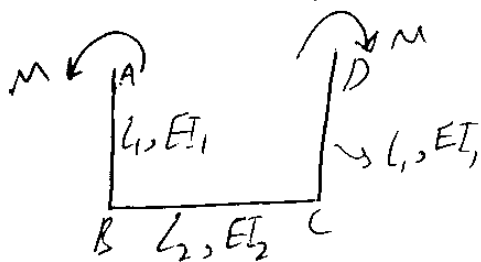


$$\frac{\pi}{\frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{EI_2}} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{\frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{2EI_2}} \quad (2)$$

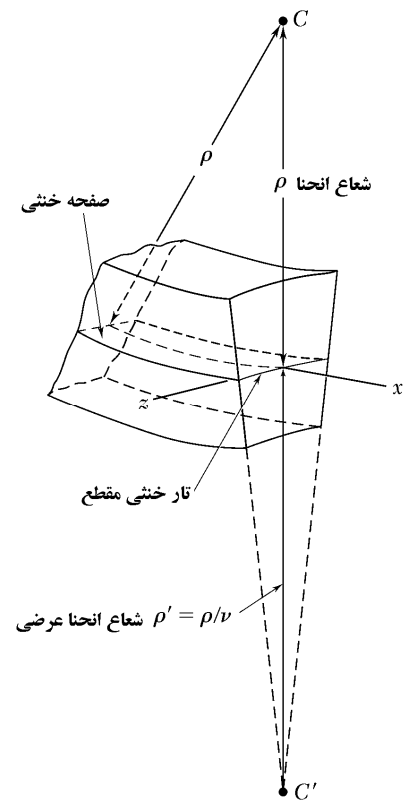
$$\frac{\pi}{\frac{l_1}{EI_1} + \frac{2l_2}{EI_2}} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{\frac{2l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{EI_2}} \quad (4)$$



$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{l_1}{2\beta} \rightarrow \beta = \frac{l_1}{2R_1} \\ R_2 = \frac{l_2}{2\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{l_2}{2R_2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{l_1}{2R_1} + \frac{l_2}{2R_2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{M}{EI_1} \times l_1 + \frac{1}{2} \times \frac{M}{EI_2} \times l_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow M = \frac{\pi}{\frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{EI_2}}$$



آزاد ۸۶

۵۰- در کدامیک از مقاطع زیر تحت اثر لنگر خمشی M ارتفاع مقطع کاهش می یابد؟



۱۳-۱۰- آنالیز ابعادی

آزاد ۸۸

۷۳- اگر در یک مقطع جدار نازک باز ابعاد مقطع α برابر و ضخامت مقطع $\frac{1}{\alpha}$ برابر شود، مقاومت پیچشی و سختی پیچشی مقطع به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

- (۱) برابر $\frac{1}{\alpha}$ و برابر $\frac{1}{\alpha}$ (۲) برابر $\frac{1}{\alpha}$ و برابر $\frac{1}{\alpha^2}$ (۳) برابر $\frac{1}{\alpha^2}$ و برابر $\frac{1}{\alpha}$ (۴) برابر $\frac{1}{\alpha^2}$ و برابر $\frac{1}{\alpha^2}$

Handwritten derivation for torsion of a thin-walled tube:

$$T = \frac{1}{3} \rho t^3 \tau \rightarrow T \propto \frac{1}{\alpha}$$

where $\rho \propto \alpha$ and $t \propto \frac{1}{\alpha}$.

$$\frac{GJ}{L} = \frac{1}{3} \rho t^3 \tau \rightarrow \frac{GJ}{L} \propto \frac{1}{\alpha^2}$$

۵۲- در یک پوسته که تحت اثر بار متمرکز P در وسط آن است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود لنگر خمشی و تنش خمشی ماکزیمم پوسته به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

- (۱) α برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر
 (۲) α برابر و $\frac{1}{\alpha^3}$ برابر
 (۳) α^2 برابر و $\frac{1}{\alpha^3}$ برابر
 (۴) α برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

آزاد ۸۵

۷۷- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود انحنای ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

- (۱) α برابر
 (۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر
 (۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر
 (۴) تغییر نمی کند

$$\delta = \frac{1}{P} = \frac{M}{EI} = \frac{P \cdot L}{EI} \quad \begin{array}{l} P \rightarrow \alpha^3 \text{ برابر} \\ L \rightarrow \alpha \text{ برابر} \\ I \rightarrow \alpha^4 \text{ برابر} \end{array} \rightarrow \text{نسبت آنگا}$$

آزاد ۸۴

۲۶- در یک پوسته که تحت اثر وزن خود است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود، تنش خمشی ماکزیمم پوسته چند برابر خواهد شد؟

- (۱) $\frac{1}{\alpha^2}$
 (۲) α
 (۳) $\frac{1}{\alpha}$
 (۴) α^2

$$\sigma = \frac{6(PL)}{bh^2} = \frac{6(\alpha^3)(\alpha)}{(\alpha)(\alpha^2)} = \alpha$$

آزاد ۸۹

۴۹- اگر در یک عضو تحت پیچش فقط ابعاد مقطع α برابر شود (طول عضو ثابت بماند) مقاومت پیچشی و سختی پیچشی عضو به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

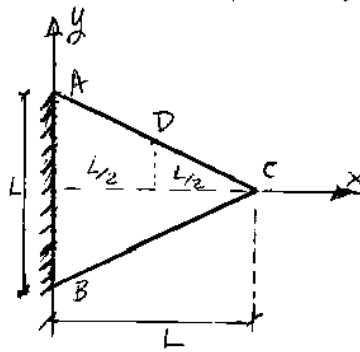
- (۱) α^2 برابر و α^4 برابر
 (۲) α^2 برابر و α^3 برابر
 (۳) α^3 برابر و α^3 برابر
 (۴) α^3 برابر و α^4 برابر

آزاد ۸۹

۵۲- در یک پوسته که تحت اثر بار متمرکز P در وسط آن است اگر همه ابعاد پوسته α برابر شود شیب و تغییر مکان ماکزیمم پوسته به ترتیب چند برابر خواهد شد؟

- (۱) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر
 (۲) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha}$ برابر
 (۳) $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر
 (۴) $\frac{1}{\alpha}$ برابر و $\frac{1}{\alpha^2}$ برابر

۵۴- ورق مثلثی شکل (متساوی الساقین) ABC با ضخامت t و وزن مخصوص γ مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. این ورق از طریق ضلع AB به صورت صلب به تکیه‌گاه متصل بوده و تحت اثر وزن خود تحت خمش قرار دارد. اگر تنش σ_x در نقطه D برابر با σ_0 باشد، تنش σ_x در نقطه A کدام است؟



$$(\sigma_x)_A = \sigma_0 \quad (1)$$

$$(\sigma_x)_A = 2\sigma_0 \quad (2)$$

$$(\sigma_x)_A = \frac{1}{L}\sigma_0 \quad (3)$$

$$(\sigma_x)_A = 2L\sigma_0 \quad (4)$$

گزینه ۲

با استفاده از آنالیز ابعادی:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow \frac{PLc}{I} \Rightarrow \frac{PL}{bh^2}$$

P وابسته به وزن بوده و در نقطه A نسبت به نقطه D به اندازه ۴ برابر افزایش دارد.

L دو برابر شده است

B همان ضخامت بوده و تغییر نکرده است

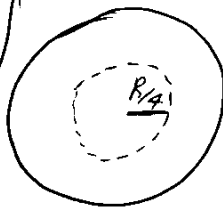
h نیز دو برابر شده است.

بنابراین تنش $2 = \frac{4 \times 2}{1 \times 2^2}$ می شود.

هسته خمش ه: مجموعه نقاطی است که اگر بار به آنها اثر کند محور خمشی بر مقطع هم‌ان

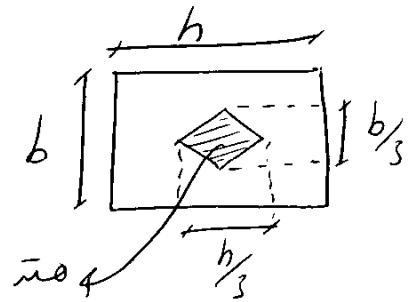
می‌شود.

اگر بارها در یک راس داخل خط چین وارد شود هیچ نقطه‌ای به کشش نمی‌افتد و همه جا کشش فشاری داریم

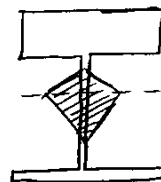
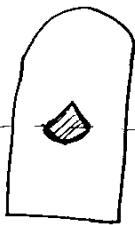
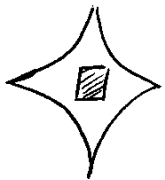
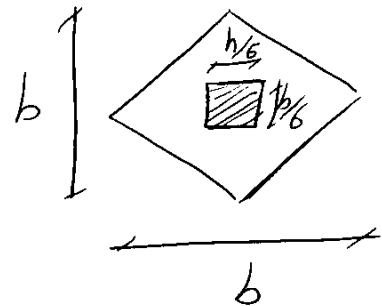
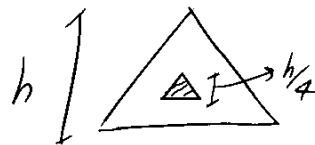
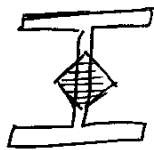


بار مقطع دایره‌ای

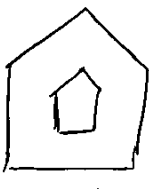
✓ اگر نیرو P در یکی از اضلاع هسته حرکت کند تنش در راس مقابل آن صفر خواهد بود



✓ اگر نیرو P بر راس هسته وارد شود تنش در ضلع مقابل آن راس صفر است.

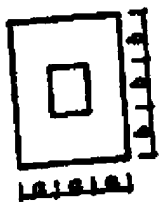


تافشی



اگر h ضلعی اگر h فرد باشد شکل هسته و مقطع یکسان است

۵۴- هسته مقطع مستطیلی توخالی زیر کدام است؟ ($a < b$)



(۲) یک لوزی با قطر کوچک $\frac{14a}{9}$ و قطر بزرگ $\frac{14b}{9}$

(۱) یک لوزی با قطر کوچک $\frac{10a}{9}$ و قطر بزرگ $\frac{10b}{9}$

(۳) یک مستطیل به ابعاد $\frac{14a}{9}$ و $\frac{14b}{9}$

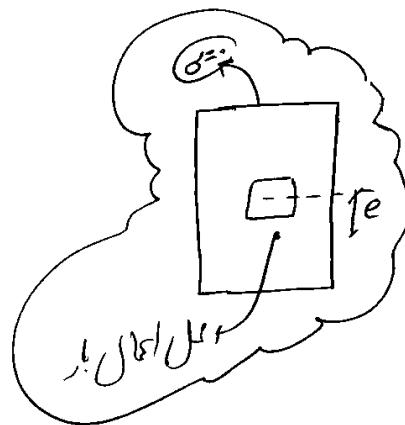
(۲) یک مستطیل به ابعاد $\frac{10b}{9}$ و $\frac{10a}{9}$

$$A = 3a \times 3b - ab = 8ab$$

$$I_n = \frac{3a(3b)^3}{12} - \frac{ab^3}{12} = \frac{20ab^3}{3}$$

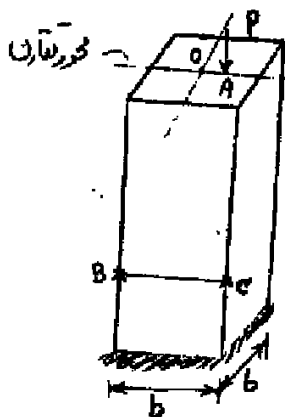
$$\sigma = \frac{P}{8ab} - \frac{(Pe) \times 1.5b}{\frac{20ab^3}{3}} = 0 \rightarrow \frac{P}{ab} \left(\frac{1}{8} - \frac{4.5e}{20b} \right) = 0$$

$$\rightarrow e = \frac{20b}{8 \times 4.5} = \frac{5b}{9} \rightarrow \text{قطر بزرگ لوزی} = 2 \times e = \frac{10b}{9}$$



سراسری ۹۲- دکتری

۸- ستونی با مقطع مربع مقروض است. بار متمرکز P در نقطه A واقع بر محور تقارن مقطع به فاصله e از مرکز مقطع O به ستون اعمال می‌شود. اگر تنش ناشی از این بار در نقطه B صفر باشد، تنش در نقطه C چقدر است؟



(۱) صفر

(۲) $\frac{2P}{b^2}$

(۳) $\frac{P}{b^2}$

(۴) $\frac{1.5P}{b^2}$

۱۰- هسته مرکزی یک مقطع به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a کدام است؟

(۲) یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\frac{a}{3}$

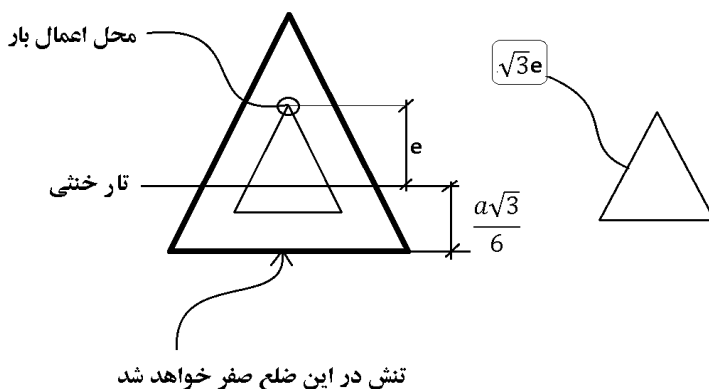
(۱) یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\frac{a}{4}$

(۴) یک لوزی به قطر $\frac{2}{3}a$

(۳) یک لوزی به قطر $\frac{1}{2}a$

گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{Mc}{I} - \frac{P}{A} \\ I &= \frac{a \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{36} = \frac{\sqrt{3}a^4}{96} \\ A &= \frac{a \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \end{aligned} \right\} \sigma = \frac{(Pe) \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}a^4}{96}\right)} - \frac{P}{\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)} = 0 \rightarrow e = \frac{a}{(4\sqrt{3})} \rightarrow \text{ضلع هسته} = \sqrt{3}e = \frac{a}{4}$$



سراسری ۸۷

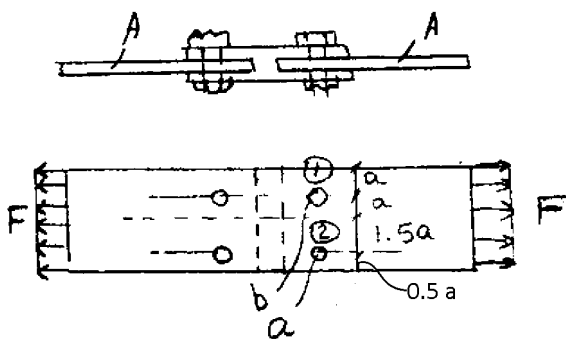
۵۸- در شکل روبرو کل نیروی وارد به هر ورق A مساوی F است. نیروی وارد به پیچ‌های a و b که با قطر یکسان هستند چقدر است؟

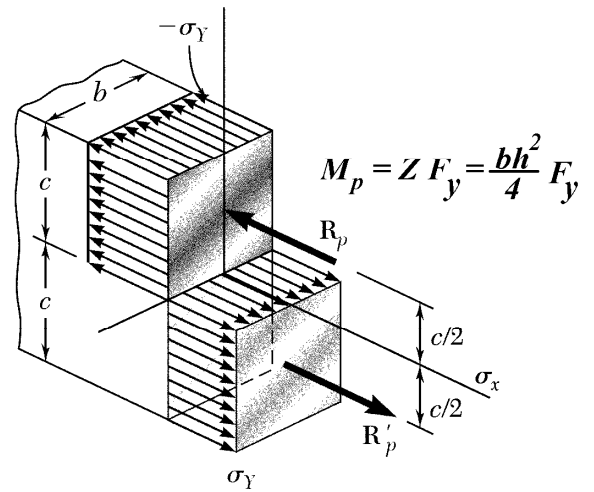
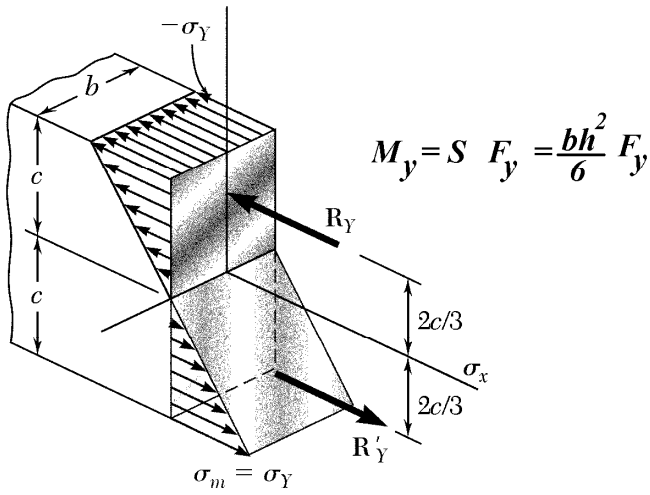
(۱) $F_a = F_b = F$

(۲) $F_a = F_b = \frac{F}{2}$

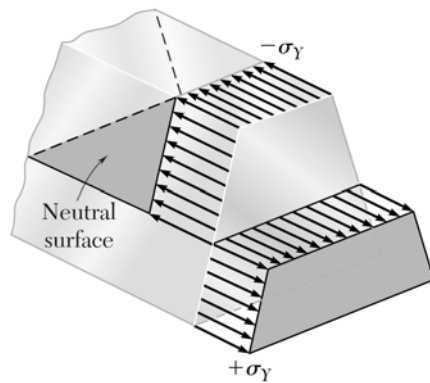
(۳) $F_b = 0.6F, F_a = 0.4F$

(۴) $F_b = 0.4F, F_a = 0.6F$



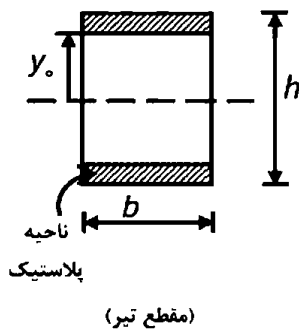


تنشهای ناشی از لنگر پلاستیک در مقطع دوزنقه:



دکتری ۹۴

۲- اگر بخشی از مقطع یک تیر تحت اثر ممان خمشی پلاستیک شده و رفتار ماده مورد مصرف، الاستیک کاملاً پلاستیک و تنش تسلیم آن برابر σ_y باشد، ممان وارده در این مقطع تیر کدام است؟

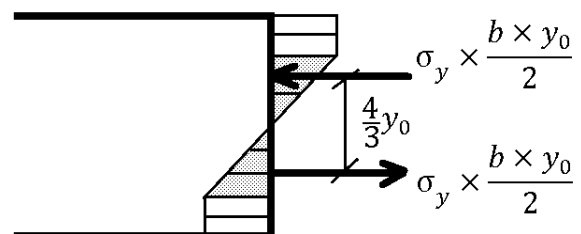
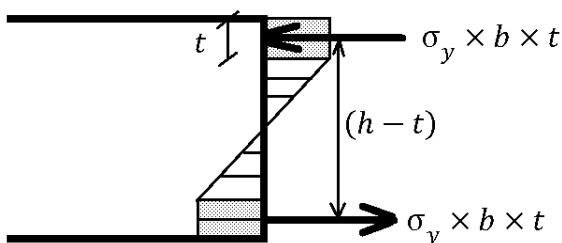


- (۱) $\sigma_y b \frac{h^2}{4}$
- (۲) $\sigma_y b \frac{h^2}{6}$
- (۳) $\sigma_y b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} \right)$
- (۴) $\sigma_y b \left(\frac{h^2}{6} - \frac{y_0^2}{4} \right)$

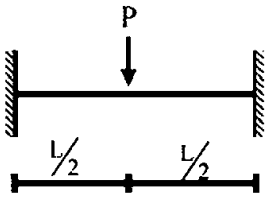
$$M = (\sigma_y \times b \times t) (h - t) + \left(\sigma_y \times \frac{b \times y_0}{2} \right) \left(\frac{4}{3} y_0 \right) = \sigma_y b \left(ht - t^2 + \frac{2y_0^2}{3} \right)$$

$$\xrightarrow{t = \frac{h}{2} - y_0} = \sigma_y b \left(h \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) - \left(\frac{h}{2} - y_0 \right)^2 + \frac{2y_0^2}{3} \right)$$

$$= \sigma_y b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} \right)$$



- ۱۰- یک تیر دو سرگیردار تحت بار متمرکز P که در مرکز آن قرار دارد و رفتار P به صورت الاستو - پلاستیک کامل در منحنی تنش - کرنش می باشد، مورد نظر است. نسبت $\frac{P_u}{P_y}$ که P_u بار نهایی و P_y بار جاری شدن می باشد) کدام است؟ EI در کل طول تیر ثابت می باشد.



$$\frac{M_p}{M_y} \quad (1)$$

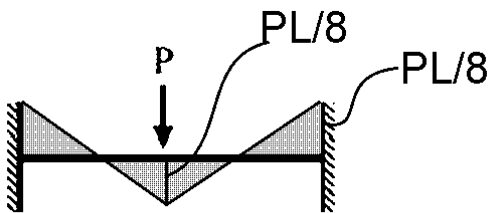
$$2 \frac{M_p}{M_y} \quad (2)$$

$$4 \frac{M_p}{M_y} \quad (3)$$

$$8 \frac{M_p}{M_y} \quad (4)$$

گزینه ۴

P_y مربوط به شروع تسلیم است. یعنی وقتی اولین تنش در نقطه ای از تیر به σ_y می رسد. در سازه فوق لنگر در وسط تیر و انتهای آن حداکثر می باشد:

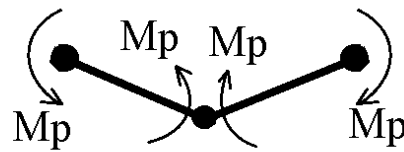
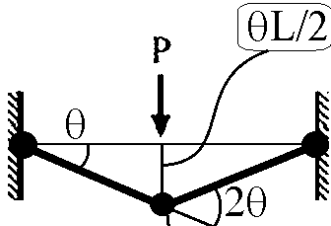


بار تسلیم برابر است با:

$$\frac{PL}{8} < M_y \quad \rightarrow \quad P_y = 8 \frac{M_y}{L}$$

P_u مربوط به تسلیم کامل است. یعنی وقتی تیر تبدیل به مکانیزم شده است. برای یافتن این بار می توان از روش کار مجازی استفاده کرد:

$$P_u \frac{\theta L}{2} = 2(M_p \times \theta) + M_p \times 2\theta \quad \rightarrow \quad P_u = \frac{8M_p}{L}$$

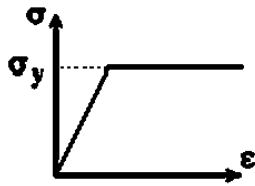
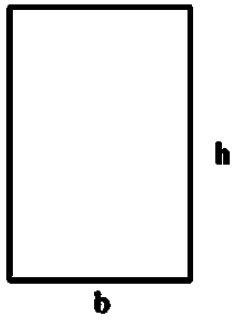


مفصل پلاستیک

$$\frac{P_u}{P_y} = 8 \frac{M_p}{M_y}$$

$$\sigma_y \quad \sigma = ?$$

۱۳- در مقطع مستطیل شکل زیر، در صورتی که مقطع تا ممان پلاستیک M_p بارگذاری و سپس لنگر آن حذف گردد، مقدار تنش در محل تار خنثی پس از حذف لنگر کدام است؟



(۱) $-0.5\sigma_y$

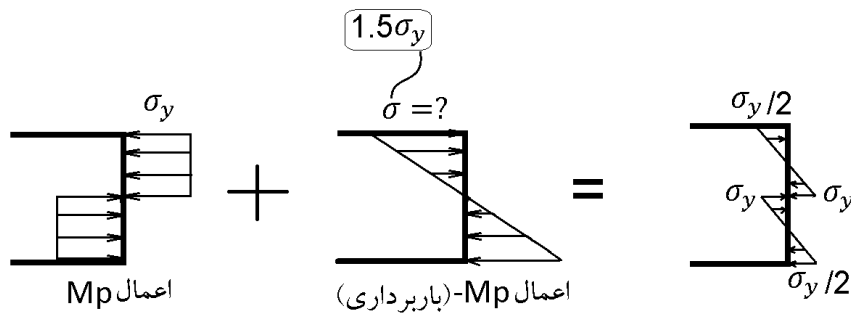
(۲) 0

(۳) $0.5\sigma_y$

(۴) $\pm\sigma_y$

گزینه ۴

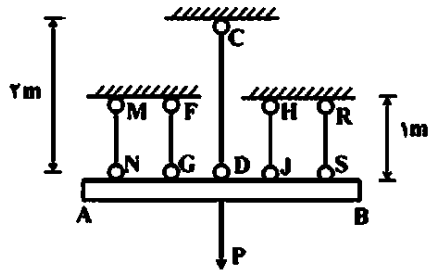
هنگام باربرداری رفتار مقطع خطی خواهد بود:



در شکل فوق مقدار σ به صورت زیر بدست می آید:

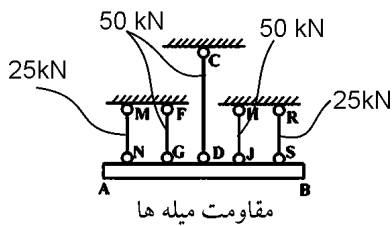
$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{M_p}{Z_p} = \frac{M_p}{\left(\frac{bh^2}{4}\right)} \\ \sigma &= \frac{-M_p}{S} = \frac{-M_p}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)} \end{aligned} \right\} \sigma = -1.5\sigma_y$$

۱۴- در مجموعه نشان داده شده که تیر صلب AB توسط پنج میله به طور متقارن مطابق شکل زیر، نگهداری می شود و تحت بار مرکزی P قرار گرفته است. اعضاء میله از مصالح الاستوپلاستیک، با مدول ارتجاعی $E = ۲۰۰$ گیگاپاسکال می باشند. تنش حد الاستیک دو میله کناری MN و RS و $\sigma_y = ۲۵۰$ مگاپاسکال و سایر میله ها ۵۰۰ مگاپاسکال می باشد. بار P_y, P_u برای مجموعه به ترتیب چند کیلونیوتن است؟ سطح مقطع هر میله ۱۰۰ میلی متر مربع می باشد.



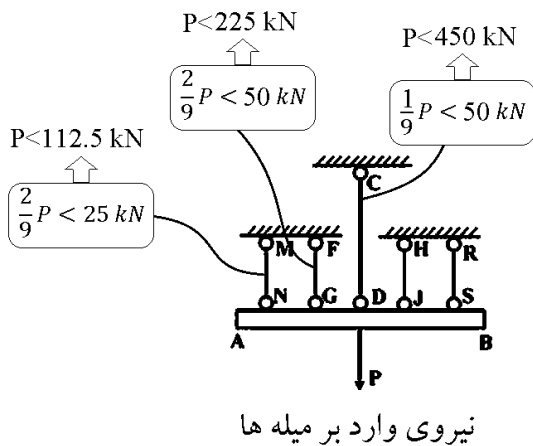
- گزینه ۴
- (۱) ۷۵, ۱۲۵
 - (۲) ۲۵, ۱۵۰
 - (۳) ۱۰۰, ۱۷۵
 - (۴) ۱۱۲,۵, ۲۰۰

ابتدا باید مقاومت (تسلیم) هر میله را محاسبه کنیم:



$$P_{MN} = P_{RS} = 250 \times 100 = 25 \text{ kN}$$

$$P_{FG} = P_{HJ} = P_{CD} = 500 \times 100 = 50 \text{ kN}$$



P_y نشان دهنده "شروع" تسلیم است. میله ها همزمان به تسلیم نمی رسند.

باید نیروی وارد بر آنها را بیابیم:

نیرو به نسبت سختی بین اعضا تقسیم می شود (در ناحیه خطی) بنابراین

به راحتی می توان نیروی وارد بر اعضا را بدست آورد و با مقاومت آنها

مقایسه کرد (شکل مقابل)

با توجه به شکل مقاومت شروع تسلیم (کمترین مقدار P که موجب

شروع تسلیم می شود) برابر است با:

$$P_y = 112.5 \text{ kN}$$

پس از تسلیم تمامی میله ها، مجموع مقاومت تسلیم آنها نشان دهنده مقاومت نهایی سیستم خواهد بود:

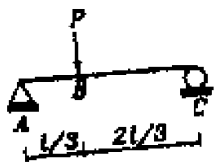
$$P_u = 25 + 50 + 50 + 50 + 25 = 200 \text{ kN}$$

۱۴- بار گذاری عرضی (برش)

۱۴-۱- تنش برشی در مقطع توپر

آزاد ۸۸

۵۶- در تیر زیر که مقطع آن مستطیلی است، تنش عمشی ماکزیمم ۲۰ برابر تنش برشی ماکزیمم است. نسبت طول مقطع به ارتفاع آن $\left(\frac{L}{h}\right)$ کدام است؟



25 (۱)

20 (۲)

15 (۳)

10 (۴)

$$M_{max} = \frac{2P}{3} \times \frac{L}{3} = \frac{2PL}{9}$$

$$\sigma_{max} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{12PL}{9bh^2} = \frac{4PL}{3bh^2}$$

$$\frac{\sigma}{\tau} = 20 \rightarrow \frac{\frac{4PL}{3bh^2}}{\frac{P}{bh}} = 20 \rightarrow \boxed{\frac{L}{h} = 15}$$

$$V_{max} = \frac{2P}{3}$$

$$\tau_{max} = 1.5V = 1.5 \times \frac{2P}{3} = \frac{P}{bh}$$

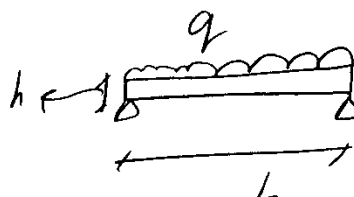
۶۶- بر تیر ساده‌ای به طول L بار یکنواختی به شدت q در تمام طول وارد می‌شود. مقطع تیر مستطیل به پهنای b و به ارتفاع h است. نسبت $\frac{L}{h}$ چقدر باشد که تنش خمشی ماکزیمم ده برابر تنش برشی ماکزیمم شود؟

۱ (۴)

۵ (۳)

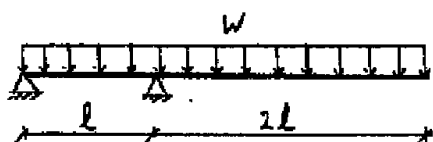
۱۰ (۲)

۲۰ (۱)



$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{6\left(\frac{qL^2}{8}\right)}{bh^2} \\ \tau_{max} &= \frac{1.5\left(\frac{qL}{2}\right)}{bh} \\ \sigma_{max} &= 10\tau_{max} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{6\left(\frac{qL^2}{8}\right)}{bh^2} = 10 \times \frac{1.5\left(\frac{qL}{2}\right)}{bh} \rightarrow \frac{L}{h} = 10$$

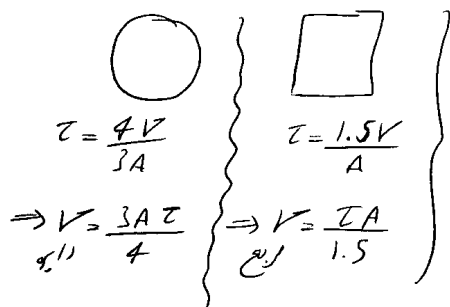
۴- تیری با مقطع مستطیلی، به عرض b و ارتفاع h مطابق شکل زیر تحت بار گسترده W قرار دارد. حداکثر تنش برشی در تیر کدام است؟



- ۱) $2.5 \frac{Wl}{bh}$
- ۲) $3.75 \frac{Wl}{bh}$
- ۳) $3 \frac{Wl}{bh}$
- ۴) $6.75 \frac{Wl}{bh}$

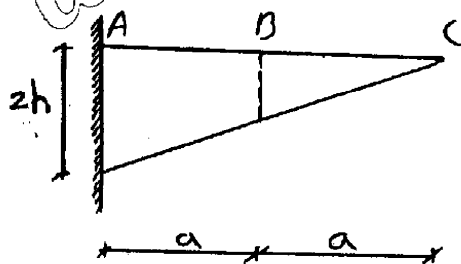
۲۰- مقطع یک تیر به شکل دایره و مقطع تیر دیگری به شکل مربع است. مساحت مقطع هر دو تیر مساوی است. نسبت مقاومت برشی تیر اول به تیر دوم برابر است با: (راهنمایی: حداکثر تنش برشی در مقطع دایره با سطح مقطع A تحت برش V برابر $\frac{4V}{3A}$ می‌باشد.)

- ۱) $\frac{1}{9}$
- ۲) $\frac{4}{3}$
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{9}{8}$



$$\left. \begin{aligned} \tau_{circle} &= \frac{4V}{3A} \\ \tau_{square} &= \frac{1.5V}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{circle}}{V_{square}} = \frac{\frac{3}{4}A}{\frac{1}{1.5}} = \frac{9}{8}$$

کدام است؟



۵۶- پهنای تیر غیرممنشوری نشان داده شده در طول تیر، ثابت می‌باشد تحت اثر وزن تیر. نسبت γ فرض شود و فقط اثرات نیروی برشی در نظر گرفته شود)

- ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

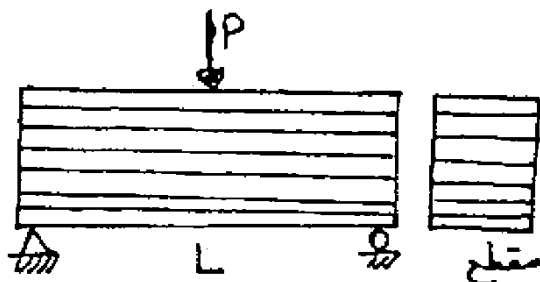
گزینه ۳

از آنجا گفته شده که تنها اثرات نیروی برشی در نظر گرفته شود، نیازی به محاسبه لنگر نیست.

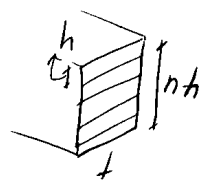
برش در نقطه B برابر $V_B = \left(\frac{h \times b \times a}{2}\right) \gamma = \frac{hba\gamma}{2}$ می باشد. و برش در نقطه A برابر $V_A = \left(\frac{2h \times b \times 2a}{2}\right) \gamma = 2hba\gamma$ می باشد. بنابراین نسبت تنش های برشی در این دو نقطه برابر است با:

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\left(\frac{1.5V_A}{b(2h)}\right)}{\left(\frac{1.5V_B}{b(h)}\right)} = \frac{V_A}{2V_B} = 2$$

۶۸- n تیر با مقطع مستطیلی شکل که سطح مقطع هر یک از آنها A می‌باشد را یکبار بدون استفاده از چسب روی هم گذاشته و بار دیگر آنها را روی هم گذاشته و می‌چسبانیم. مقاومت برشی مجموعه تیرها در حالت دوم چند برابر اول است؟ (مقاومت برشی چسب از مقاومت برشی جنس تیر بیشتر است).



- ۲ (۱)
- ۱/۵n (۲)
- ۱ (۳)
- n (۴)

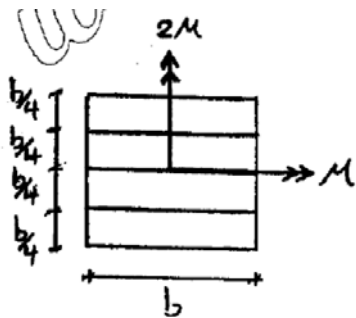


مقاومت برشی $V = \frac{\tau (It)}{\phi}$

با چسب $V = \frac{\tau (nht)}{1.5}$

بدون چسب $V = n \left[\frac{\tau (ht)}{1.5} \right]$

بنابراین مقادیر تقریبی کند



۵۲- در مقطع نشان داده شده که تحت لنگرهای خمشی حول محور افقی و قائم قرار گرفته است نسبت حداکثر تنش خمشی در حالتی که تیغه‌ها به هم متصل شده‌اند به حالتی که چهار تیغه اتصالی به یکدیگر ندارند کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{1}{8}$

گزینه ۱

در حالتی که تیغه‌ها متصل هستند:

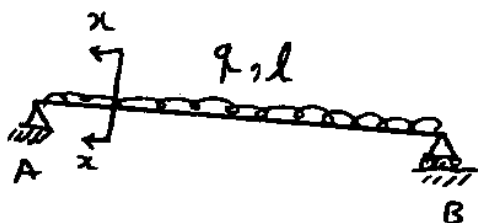
$$\sigma_1 = \frac{6M}{b^3} + \frac{6(2M)}{b^3} = \frac{18M}{b^3}$$

$$\sigma_2 = \frac{6\left(\frac{M}{4}\right)}{b\left(\frac{b}{4}\right)^2} + \frac{6\left(\frac{2M}{4}\right)}{b^2\left(\frac{b}{4}\right)} = \frac{36M}{b^3}$$

در حالتی که تیغه‌ها متصل نیستند:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

بنابراین نسبت تنش برابر است با:



۶۸- در تیر مستطیلی زیر تنش برشی ماکزیمم در بالاترین نقطه مقطع (0) چقدر است؟

(مقطع x-x در فاصله $\frac{L}{4}$ از تکیه گاه A می باشد.)

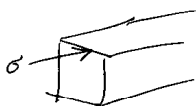
0 (۱)

(۲) $\frac{9ql^2}{64bh^2}$

(۳) $\frac{19ql^2}{16bh^2}$

(۴) $\frac{9ql^2}{32bh^2}$

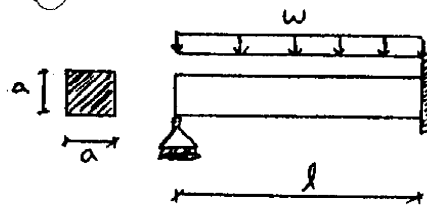
در بالاترین نقطه تنش برشی ناشی از برش صاف است و تنها تنش خمشی داریم



$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} \Rightarrow M = \left(\frac{qL}{2} \times \frac{L}{4}\right) - \frac{q\left(\frac{L}{4}\right)^2}{2} = \frac{39L^2}{32} \rightarrow \sigma = \frac{6 \times 39L^2}{32bh^2} = \frac{99L^2}{16bh^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} = \frac{99L^2}{32bh^2}$$

۶۰- حداکثر بار گسترده w را به گونه‌ای تعیین نمایید که تنش برشی هیچ کدام از نقاط مقطع از تنش مجاز برشی مصالح (τ_w) فراتر نرود؟ (از اثرات خمش صرفنظر شود)



$$\frac{4 a^2 \times \tau_w}{5 l} \quad (۲) \quad \frac{17 a^2 \times \tau_w}{12 l} \quad (۱)$$

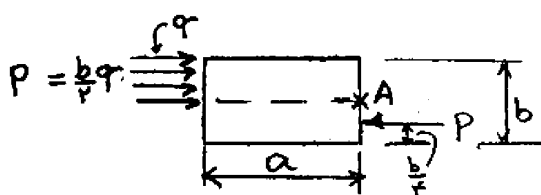
$$\frac{16 a^2 \times \tau_w}{15 l} \quad (۴) \quad \frac{3 a^2 \times \tau_w}{14 l} \quad (۳)$$

گزینه ۴

لنگر تیکه گاه گیردار با استفاده از روش شیب افت برابر $M = \frac{wL^2}{8}$ می باشد. و بنابراین با استفاده از روابط استاتیکی، عکس العمل تکیه گاه مفصلی برابر $V_L = 3wL/8$ و عکس العمل برشی تیکه گاه گیردار برابر $V_R = 5wL/8$ خواهد بود. و در نتیجه برش حداکثر در تیر برابر با $5qL/8$ می باشد. و در نتیجه:

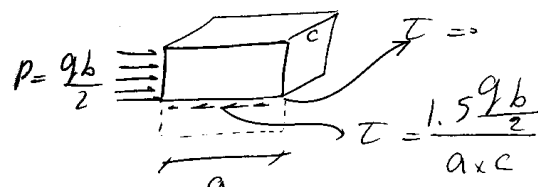
$$\tau = \frac{1.5V}{a^2} = \frac{15wL}{16a^2} \leq \tau_{all} \rightarrow w \leq \frac{16a^2}{15L} \tau_{all}$$

۶۵- مکعب مستطیلی مطابق شکل روبرو زیر اثر نیرو قرار گرفته است. تنش برشی در A چقدر است؟ ابعاد مکعب مستطیل a، b و c است.

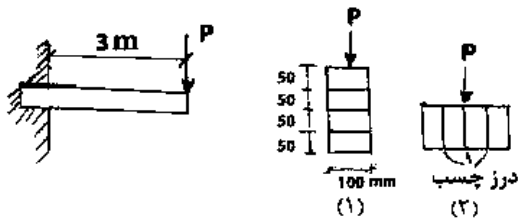


- (۱) $\frac{P}{ab}$
 (۲) $\frac{P}{ac}$
 (۳) $\frac{P}{bc}$
 (۴) صفر

گزینه ۴:

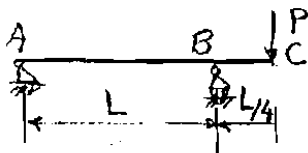


۴۹- چهار الوار با مقطع مستطیل به ابعاد 50×100 میلی متر توسط چسب به یکدیگر متصل و تیر کنسولی یا دو مقطع (۱) و (۲) مطابق شکل بوجود آورده اند. حداقل مقاومت برشی چسب برای هر یک از دو مقطع نشان داده شده، کدام است؟



$$\begin{aligned} (\tau_{min})_1 &= 4(\tau_{min})_2 \quad (1) \\ (\tau_{min})_1 &= (\tau_{min})_2 = \frac{P}{20000} \quad (2) \\ (\tau_{min})_1 &= \frac{2P}{40000} \cdot (\tau_{min})_2 = 0 \quad (3) \\ (\tau_{min})_1 &= \frac{2P}{125000} \cdot (\tau_{min})_2 = \frac{75P}{10^6} \quad (4) \end{aligned}$$

۴۲- مقطع تیر شکل روبرو ۱ می باشد. نسبت تنش برشی ماکزیمم در قسمت AB به تنش برشی ماکزیمم در قسمت BC چقدر است؟

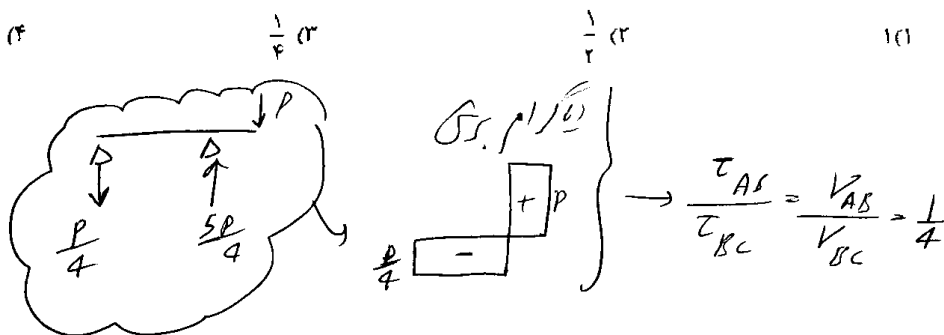


$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

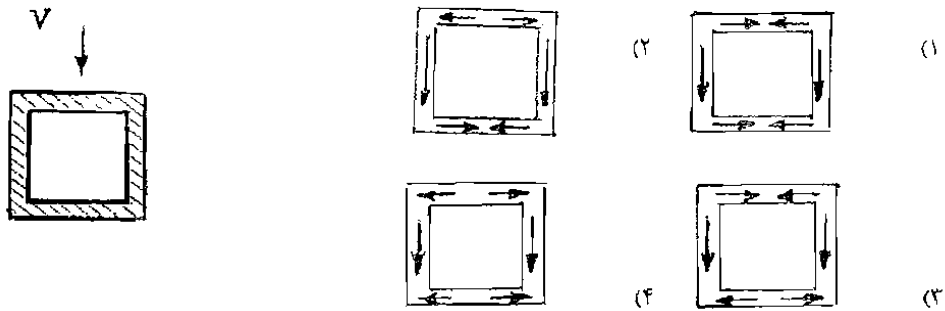
$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$(1)$$



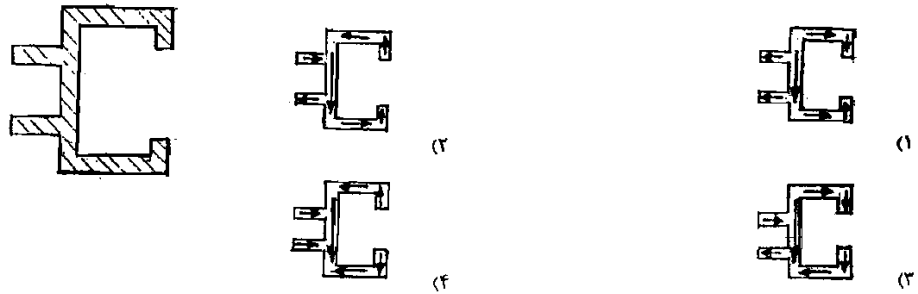
۱۴-۲- جریان برش در مقاطع جدارنازک

۵۸- برای مقطع شکل مقابل که تحت نیروی برشی قائم V می‌باشد، کدام یک از جریان‌های برشی در مقطع صحیح می‌باشد؟



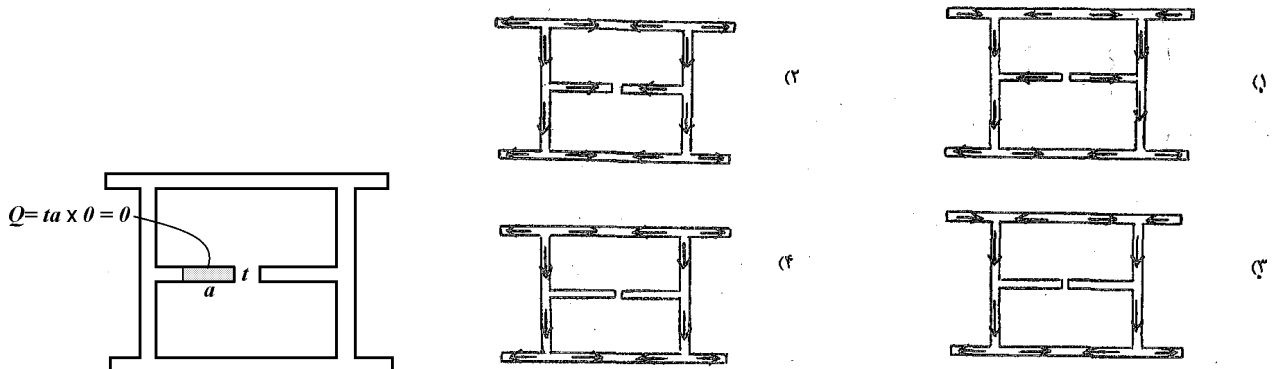
گزینه ۲

۵۲- برای مقطع شکل مقابل که تحت نیروی برشی قائم V می‌باشد، کدام یک از جریان‌های برش صحیح است؟



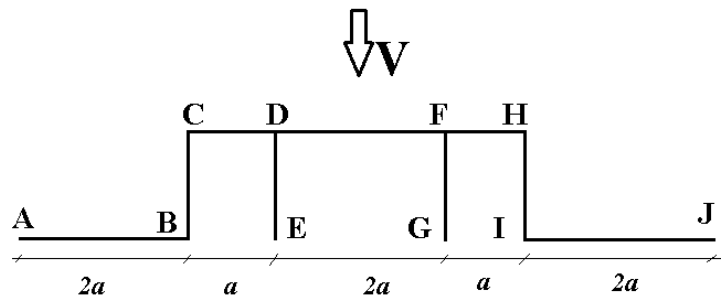
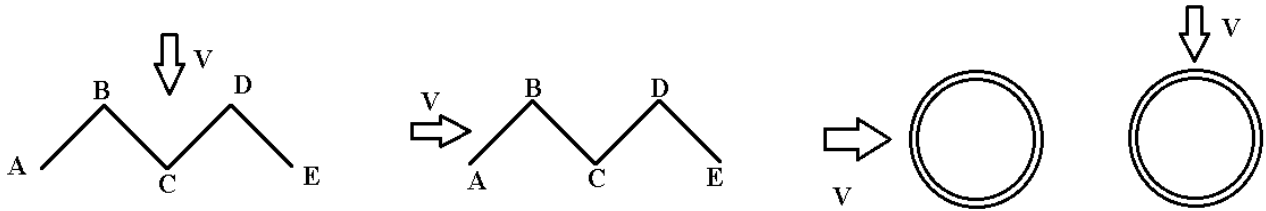
گزینه ۲

۵۹- توزیع جریان برشی تحت نیروی برشی قائم اعمال شده به مقطع متقارن جدار نازک، در کدام گزینه صحیح می‌باشد؟



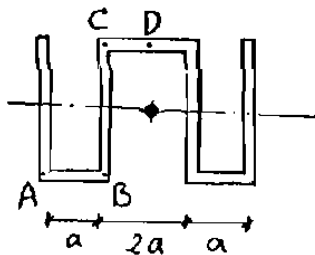
گزینه ۳. دقت شود که مقدار Q در زائده داخلی صفر بوده و تنش در آن نیز صفر است.

در چه نقاطی از مقاطع جدار نازک تنش برشی ناشی از برش صفر است؟



سراسری ۸۳

۴۹- در مقطع متقارن شکل زیر نیروی برشی موازی BC می باشد. تنش برشی در کدام یک از نقاط اشاره شده صفر خواهد بود (ضخامت ثابت است).

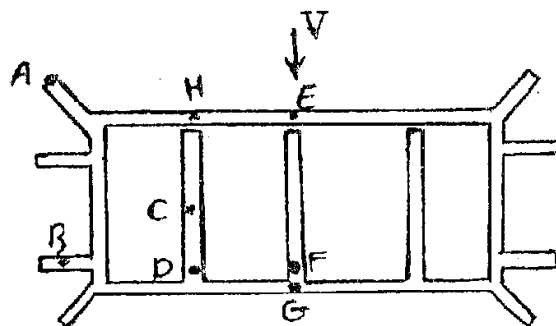


- D, B (۱)
- D, A (۲)
- C, B (۳)
- C, A (۴)

گزینه ۲

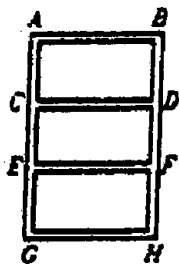
آزاد ۹۰

۶۰- تنش برش ایجاد شده ناشی از نیروی برشی V در کدام یک از نقاط از مقطع متقارن نشان داده شده صفر نمی باشد؟ (ضخامت تمام قسمت‌ها یکسان است)



- B, C, G (۱)
- H, B, F, D (۲)
- H, B, C (۳)
- D, F, G, H (۴)

۵۷- در چند نقطه از مقطع زیر تحت اثر برش قائم V تنش برشی برابر صفر است؟ (ضخامت مقطع ثابت است).



۶ (۴)

۴ (۳)

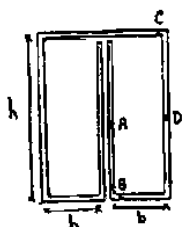
۲ (۲)

۱ (صفر)

گزینه ۳

تمرین: سراسری ۸۱

۳۶- در کدام نقطه از مقطع زیر که ضخامت یکنواختی دارد، مقدار تنش برشی برابر با صفر است؟

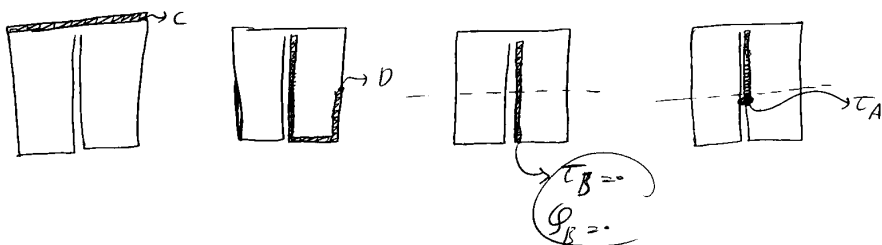


D (۱)

A (۲)

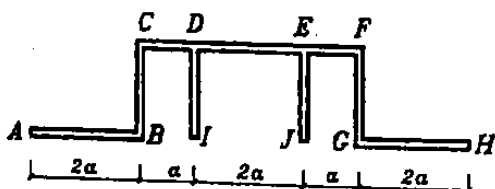
C (۳)

B (۴)



۵۵- در چند نقطه از مقطع زیر تحت اثر برش قائم V تنش برشی برابر صفر است؟

(ضخامت مقطع ثابت است)



۱ (۴)

۷ (۳)

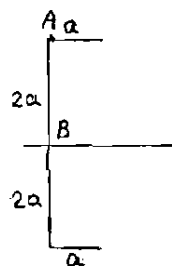
۳ (۲)

۵ (۱)

گزینه ۳

سراسری ۸۴

۵۱- ناودانی مطابق شکل روبرو به ضخامت ثابت و کم t است. اگر نیروی برشی V در جهت محور قائم بدان وارد شود، نسبت $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ چقدر است؟



است؟

۱ (۱)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

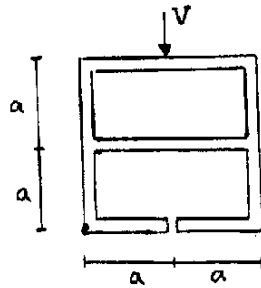
$$\tau_A = \frac{(a \times 2a)V}{It}$$



$$\tau_B = \frac{V(a \times 2a + 2a \times a)}{It}$$

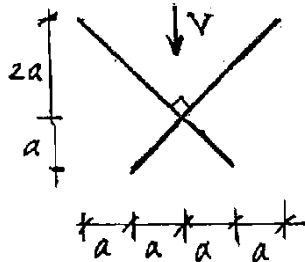
$$\rightarrow \frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

۵۱- در مقطع جدار نازک نشان داده شده که تحت نیروی برشی V قرار دارد، تنش برشی حداکثر کدام است؟ (ضخامت تمام قسمت‌ها ثابت و برابر t می‌باشد)



- (۱) $\frac{7V}{16at}$
- (۲) $\frac{15V}{32at}$
- (۳) $\frac{9V}{32at}$
- (۴) $\frac{9V}{16at}$

۵۲- مقطع تیری فلزی مطابق شکل از ورق یا ضخامت نازک t ساخته شده است. بر اثر برش V ، حداکثر تنش برشی در ورق‌ها چقدر است؟



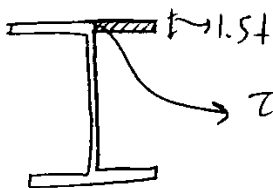
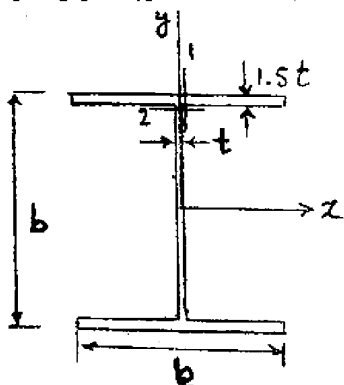
- (۱) $\frac{V}{6at}$
- (۲) $\frac{V}{3\sqrt{2}at}$
- (۳) $\frac{V}{2at}$
- (۴) $\frac{V}{3\sqrt{2}at}$

چون ضخامت ثابت است T_{max} در برشی اتفاق می‌افتد

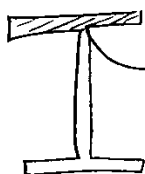
$$T_{max} = \frac{V \left(1.5a\sqrt{2}x + x \frac{1.5a}{2} \right)}{2 \left[\frac{t \times (3a\sqrt{2})^3}{12} \times (\cos 45^\circ)^2 \right]} = \frac{V}{6at}$$

۶۸- شکل روبرو مقطع تیری را نشان می‌دهد که زیر اثر نیروی برشی V در امتداد y قرار دارد. اگر τ_1 تنش برشی افقی در محل اتصال بال و جان روی بال و τ_2 تنش برشی قائم در محل اتصال بال و جان روی جان باشد و مقدار t نسبت به b کوچک فرض شود نسبت $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ کدام است؟

۱ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)



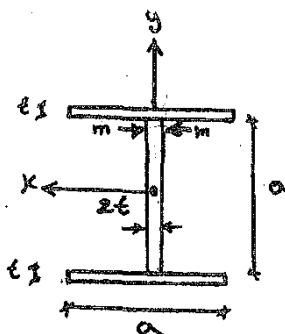
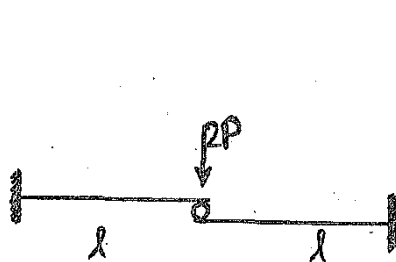
$$\tau_1 = \frac{V \left(\frac{b}{2} \times 1.5t \times \frac{b}{2} \right)}{I_x (1.5t)} \quad \left. \vphantom{\tau_1} \right\} \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{3}$$



$$\tau_2 = \frac{V \left(b \times 1.5t \times \frac{b}{2} \right)}{I_x t}$$

آزاد ۹۲

۵۸- در تیر با مقطع جدار نازک نشان داده شده تنش برشی در مقطع $(m-m)$ در محل اتصال بال و جان کدام است؟ (I_0 ممان اینرسی مقطع نسبت به محور x می‌باشد و از اثرات خمشی صرف‌نظر شود)



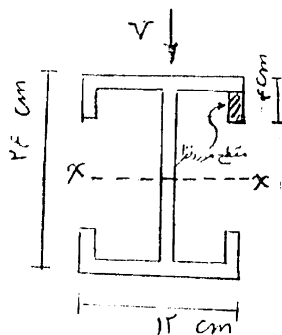
- (۱) $\frac{Pa^2}{I_0}$ (۲) $\frac{1 Pa^2}{2 I_0}$ (۳) $\frac{1 Pa^2}{4 I_0}$ (۴) $\frac{1 Pa^2}{8 I_0}$

گزینه ۳: با توجه به تقارن، برش در هر دو تیر برابر P خواهد بود و تنش برشی در جان تیر برابر خواهد بود با:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{P \left(ta \times \frac{a}{2} \right)}{I_0(2t)} = \frac{Pa^2}{4I_0}$$

سراسری ۹۰

۵۲- شکل مقابل مقطع تیری است که تحت برش V قرار دارد. اگر I_x ممان اینرسی مقطع و ضخامت در همه جا ۲ سانتی متر باشد تنش برشی در مقطع نشان داده شده کدام گزینه می باشد؟



- (۱) به طرف پایین $\frac{9}{I} V$
- (۲) به طرف پایین $\frac{18}{I} V$
- (۳) به طرف بالا $\frac{9}{I} V$
- (۴) به طرف بالا $\frac{18}{I} V$

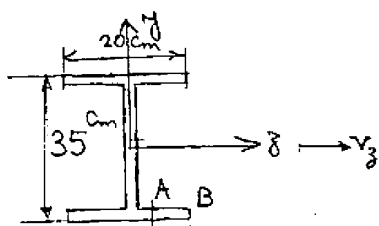
از ممبرها شروع تا ارتفاع ثابت فاشور

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V(2 \times 2 \times (9))}{I \times 2} = \frac{18V}{I}$$

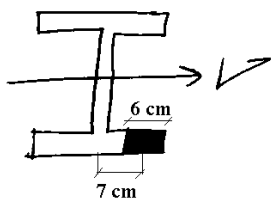
ضخامت

سراسری ۸۸

۶۹- در شکل روبه‌رو محورهای y و z محورهای تقارن هستند. اگر $V_z = 20 \text{ ton}$ باشد. تنش برشی در نقطه A بر حسب $\frac{kg}{cm^2}$ چقدر است؟ ضخامت جان و پال‌ها، همه جا یک سانتی متر و $AB = 6 \text{ cm}$ می باشد.



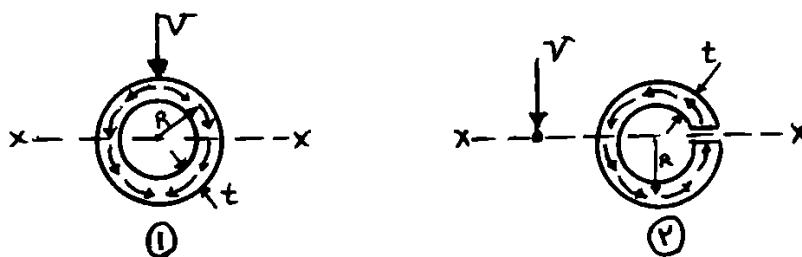
- (۱) ۵۰۰
- (۲) ۳۱۵
- (۳) ۶۳۰
- (۴) ۷۵۰



$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{20000 \times (6 \times 1 \times 7)}{(2 \times \frac{1 \times 20^3}{12}) \times 1} = 630 \frac{kg}{cm^2}$$

سراسری ۹۲

۴۸- نیروی برشی قائم V بر دو مقطع جدار نازک با شعاع (R) و ضخامت (t) یکسان اعمال می شود. لوله شماره ۱ بدون درز و شکاف است؛ ولی لوله ۲ در راستای محور $X-X$ دارای درز است، و باز می باشد. نسبت تنش برشی ماکزیمم لوله ۱ به تنش برشی ماکزیمم لوله ۲ چند است؟

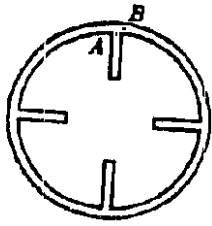


- (۱) ۲
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{2}{2}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{VQ}{I(2t)} \\ \tau_2 &= \frac{VQ}{I(t)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{2}$$

۵۶- در مقطع زیر که ضخامت حلقه t_1 و ضخامت داخلی t_2 باشد، نسبت $\frac{\tau_A}{\tau_B}$ کدام است؟



(۲) $\frac{t_1}{t_2}$

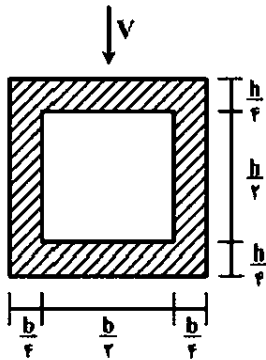
(۱) $\frac{2t_1}{t_2}$

(۴) $\frac{2t_2}{t_1}$

(۳) $\frac{t_2}{t_1}$

گزینه ۱

۲- در تیری با مقطع توخالی مطابق شکل، بر اثر نیروی برشی V ، بیشینه تنش برشی چه ضریبی از $\frac{V}{bh}$ می‌باشد؟



(۱) ۳

(۲) $\frac{14}{5}$

(۳) $\frac{16}{5}$

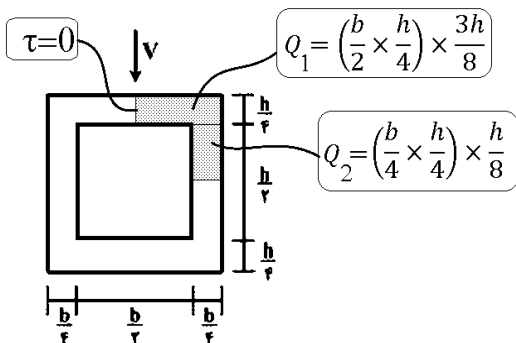
(۴) $\frac{18}{5}$

گزینه ۲

$$Q = \left(\frac{b}{2} \times \frac{h}{4}\right) \times \frac{3h}{8} + \left(\frac{b}{4} \times \frac{h}{4}\right) \times \frac{h}{8} = \frac{7bh^2}{128}$$

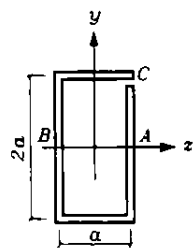
$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} = \frac{15bh^3}{16 \cdot 12} = \frac{5}{64} bh^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{7bh^2}{128}\right)}{\left(\frac{5}{64} bh^3\right) \left(\frac{b}{4}\right)} = \frac{14}{5} \frac{V}{bh}$$



تمرین: سراسری ۷۹

مقطع جدار نازک شکل داده شده در نقطه C باز می‌باشد. ضخامت جدار ثابت است. نیروی برشی در امتداد محور y می‌باشد و از مرکز برش عبور می‌کند. نسبت تنش‌های برشی در نقاط A و B چقدر است؟ $(\frac{\tau_A}{\tau_B})$

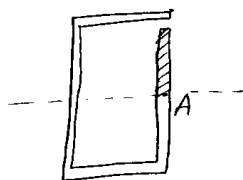
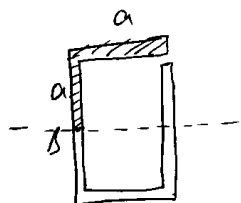


۱- (جهت تنش‌ها مختلف است)

۲- $\frac{1}{3}$ (جهت تنش‌ها مختلف است)

۳- ۱ (جهت تنش‌ها یکی است)

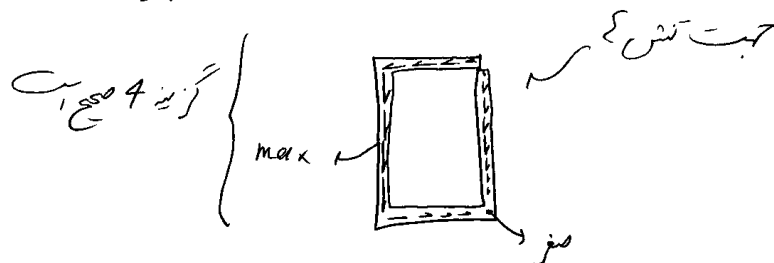
۴- $\frac{1}{3}$ (جهت تنش‌ها یکی است)



$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

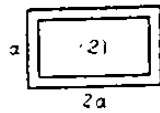
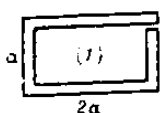
$$\tau_B = \frac{V \left[(a+t) \times a + (a+t) \times \frac{a}{2} \right]}{I t}$$

$$\tau_A = \frac{V \left[(a+t) \times \frac{a}{2} \right]}{I t}$$



تمرین: آزاد ۸۷

۵۸- تحت اثر برش قائم یکسان که در مرکز برش اثر می‌کند نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع باز اول به مقطع بسته دوم در شکل‌های زیر چقدر است؟ $(t = \text{Const}, t \ll a)$



۱/۸ (۴)

۱/۷ (۳)

۱/۵ (۲)

۱/۹ (۱)

گزینه ۴

تمرین: سراسری ۸۰

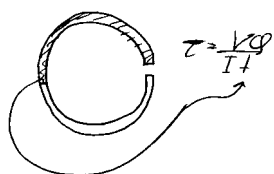
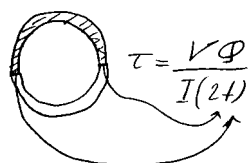
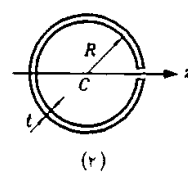
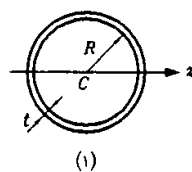
نیروی برشی قائم V در مرکز برش دو مقطع (۱) و (۲) وارد می‌شود. شکل (۱) لوله بسته و شکل (۲) لوله‌ای است که روی محور z، جدار آن به هم چسبیده نیست. نسبت تنش برشی ماکزیمم در شکل (۱) به تنش برشی ماکزیمم در شکل (۲) کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

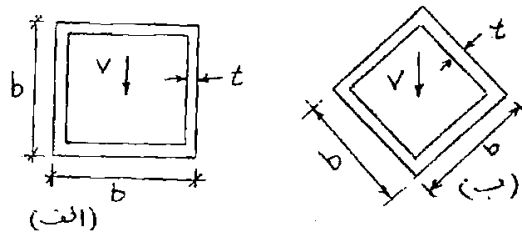


چون گفته V در مرکز برش وارد می‌شود بنابراین برش خاص داریم

در هر دو شکل ϕ و I و R ثابت است بنابراین $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{2}$

تمرین: سراسری ۸۴

۵۲- با توجه به مقاطع نشان داده شده نسبت تنش برشی ماکزیمم مقطع شکل «ب» به تنش برشی ماکزیمم مقطع شکل «الف» برابر است با:



- ۱ (۱)
 ۲ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ۳ (۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 ۴ (۴) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\tau_{\text{الف}} = \frac{V \left(b t \times \frac{b}{2} + 2 \left(\frac{b t}{2} \times \frac{b}{4} \right) \right)}{I \times 2t} = \frac{0.375 V b^2}{I}$$

$$\tau_{\text{ب}} = \frac{V \left(2 \left(b t \times \frac{b\sqrt{2}}{4} \right) \right)}{I \times 2(t)} = \frac{0.25\sqrt{2} V b^2}{I}$$

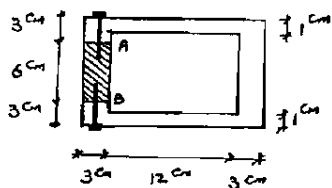
نکته چون \square دوگدر تقارن عمود بر کم دارد I آن با فرض مقطع تغییر نمی کند

$$\frac{\tau_{\text{ب}}}{\tau_{\text{الف}}} = \frac{0.25\sqrt{2}}{0.375} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

با برای I هر دو شکل یکسان است

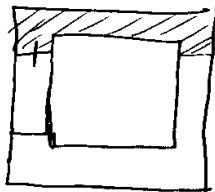
۱۴-۴- اتصال با میخ

۵۱- مقطع شکل مقابل از قطعات چوبی که توسط پیچ در محل های A و B متصل شده اند، تشکیل یافته است. در صورتی که فواصل پیچ ها در طول عضو برابر ۱۰ cm و نیروی برشی مجاز هر پیچ ۱۰۰۰ kg باشد، مطلوبست حداکثر نیروی برشی مجاز قابل تحمل توسط



مقطع: (I = ممان اینرسی مقطع)

- ۱) ۰,۶۸ I (kg)
- ۲) ۱,۰ I (kg)
- ۳) ۱,۳۶ I (kg)
- ۴) ۲,۷۲ I (kg)



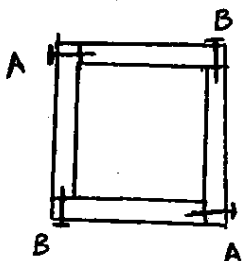
$$\tau_A = \frac{V(12 \times 1 \times 5.5 + 2(3 \times 3 \times 4.5))}{I \times 6} \rightarrow \tau_A = \frac{24.5V}{I} \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{نیروی هر پیچ} = \tau_A \times (\text{مساحت بارگیر هر پیچ}) = \frac{24.5V}{I} (3 \times 10) = \frac{735V}{I}$$

سوال: قوی

$\frac{735}{I} V < 1000 \Rightarrow V < 1.36 I$

مطابق شکل زیر از اتصال چهار الوار به ابعاد ۲۰ cm × ۲۰ cm تیری یا مقطع چوبی ساخته شده است. اگر تیر تحت اثر برش قائم ۱/۸ تن قرار بگیرد و نیروی برشی مجاز هر میخ ۲۰۰ کیلوگرم نیرو باشد حداکثر فاصله بین میخهای A چقدر می تواند باشد؟



- ۱) ۲۱/۸ cm
- ۲) ۲۱ cm
- ۳) ۱۹/۶ cm
- ۴) ۱۷ cm

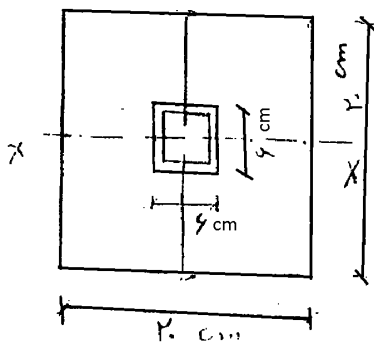
$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(500)(18 \times 2 \times 10)}{\left(\frac{22^4}{12} - \frac{18^4}{12}\right) \times 2 \times 2} = 4.2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نیروی هر میخ} = \tau_A \times (2 \times \text{مساحت بارگیر هر میخ}) \\ \text{فواصل پیچ ها} \end{array} \right\} < 200 \rightarrow S < \frac{200}{2 \times \tau_A} = 24 \text{ cm}$$

مقطع نشان داده شده در شکل متشکل از دو قطعه‌ی چوبی مجزا می‌باشد که به وسیله پیچ کردن آنها در بالا و پایین به وجود آمده است. چنانچه پیچ‌ها به فاصله ۱۰ cm از یکدیگر در طول عضو به کار برده شوند و نیروی مجاز برشی هر پیچ

۱۰۰۰ kg بوده و تنش مجاز چوب $\tau = 5 \frac{kg}{cm^2}$ باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز قابل اعمال (V) توسط مقطع پند کیلوگرم

است؟ ($I_x = 133333 cm^4$)



- (۱) ۲۴۴۲
- (۲) ۴۸۸۴
- (۳) ۴۴۴۴
- (۴) ۱۳۳۳۳

۵۵ کنترل تنش در چوب:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{1.5V}{A} < 5 \Rightarrow \frac{1.5V}{20 \times 20} < 5 \Rightarrow V < 13333 \text{ kg}$$

کنترل تنش پیچ:

تنش کار در پیچ

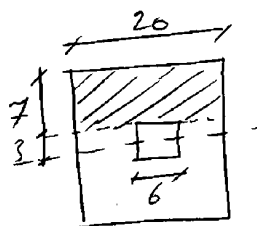
$$\tau \times A < 1000 \Rightarrow \frac{VQ}{It} \times A < 1000$$

تنش در چوب

مساحت پیچ

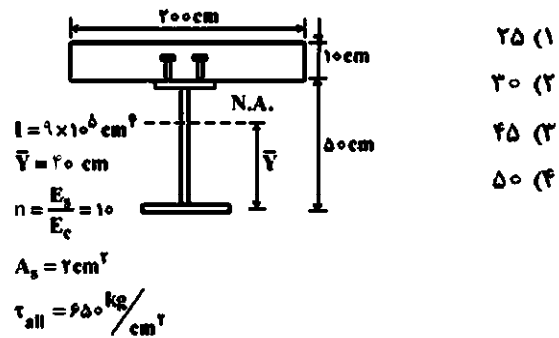
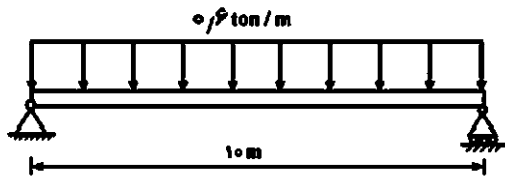
$$\Rightarrow \frac{V \times (7 \times 20 \times 6.5)}{\frac{20^3}{12} \times 20} \times 6 \times 10 < 1000$$

فاصله پیچ



$$\Rightarrow V < 4884 \text{ kg} \rightarrow \text{پیچ تعیین کننده است}$$

۱۹- در شکل زیر، یک تیر مرکب به طول ۱۰ متر برای تحمل بار یکنواخت ۰/۶ تن بر متر طراحی شده است. با توجه به اطلاعات داده شده، حداکثر فاصله برش گیرها چند سانتی متر است؟



گزینه ۱

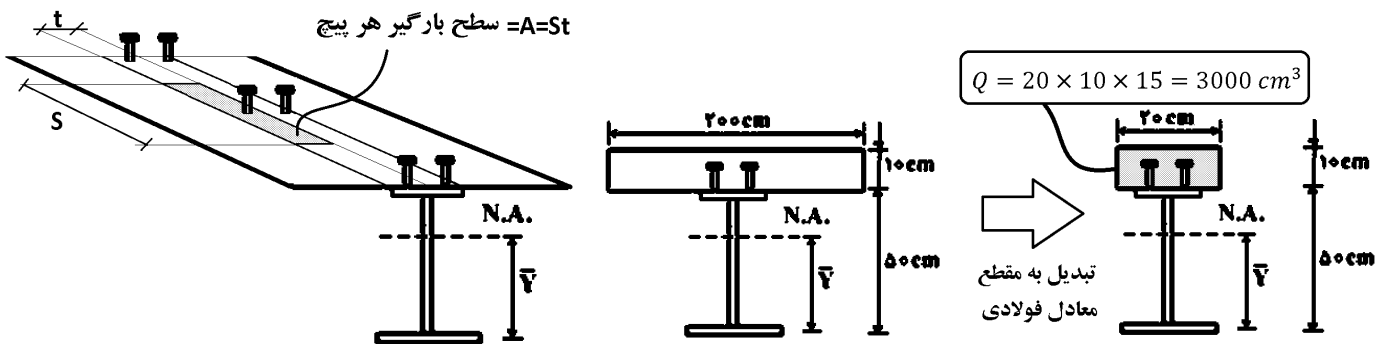
حداکثر برش وارد بر تیر برابر است با:

$$V_{\text{تیر}} = \frac{ql}{2} = \frac{0.6 \times 10}{2} = 3 \text{ ton} = 3000 \text{ kg}$$

• با توجه به اینکه در هر مقطع دو پیچ داریم نصف مقدار فوق توسط هر پیچ تحمل می شود.

مقاومت برشی هر پیچ برابر است با:

$$F_{\text{مجاز پیچ}} = \tau_{\text{all}} A_s = 650 \times 2 = 1300 \text{ kg}$$

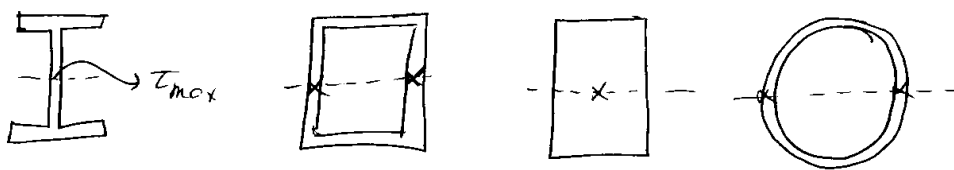


نیروی وارد بر هر پیچ باید کمتر از مقاومت مجاز آن باشد:

$$\left[F_{\text{برشگیر}} = (A_{\text{سطح بارگیر}}) \times (\tau) = (St) \left(\frac{V}{It} Q \right) = (S) \left(\frac{V}{I} Q \right) = (S) \left(\frac{3000}{2} \times \frac{3000}{9 \times 10^4} \right) \right] < 26 \rightarrow S < 26 \text{ cm}$$

۱۴-۵- تنش برشی در مقاطع با عرض متغیر

تنش برشی حداکثر: اگر ضخامت جدار ثابت باشد τ_{max} در تارشی اتفاق می افتد:



ول اگر ضخامت ثابت نباشد

$\left. \begin{matrix} h \\ \left. \begin{matrix} \triangle \\ \alpha \\ h/2 \end{matrix} \right\} \tau_{max} \text{ در وسط ارتفاع خواهد بود نه در } \frac{h}{3}$
 $\left. \begin{matrix} h \\ \left. \begin{matrix} \diamond \\ \alpha \\ h/8 \end{matrix} \right\} \tau_{max} \text{ در } \frac{h}{8} \text{ از تارشی قرار دارد}$

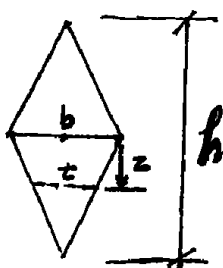
$\left. \begin{matrix} \text{دایره} \\ \alpha \\ \text{بیضی} \end{matrix} \right\} \tau_{max} \text{ در تارشی خواهد بود}$

اقتصادی ترین مقطع برای برش، لوزی می باشد:

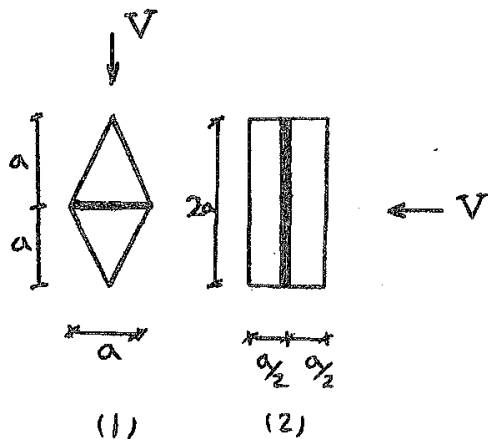
$\tau_{max} = \left[\begin{matrix} \frac{1.5V}{A} & \frac{4V}{3A} & 1.5 \frac{V}{A} & \frac{2}{8} \frac{V}{A} \end{matrix} \right]$

سراسری ۹۲

۴۶- در مقطع تیر نشان داده شده در شکل، که تحت برش قائم V قرار دارد، ماکزیمم تنش برشی در چه تاری (Z) به وقوع می پیوندد.



- (۱) $Z = \frac{h}{12}$
- (۲) $Z = \frac{h}{6}$
- (۳) $Z = \frac{h}{8}$
- (۴) $Z = 0$



۶۰- نسبت تنش برشی ایجاد شده در چسب در مقطع (۱) به (۲) تحت نیروی برشی V کدام است؟

- ۱ (۱) ۱/۵ (۲)
- ۲ (۳) ۲/۵ (۴)

گزینه ؟:

در مقطع لوزی تنش برشی حداکثر در محل چسب برابر است با:

$$\tau_1 = \frac{V \left(\frac{a^2 a}{2 \cdot 3} \right)}{\left(2 \frac{a^4}{12} \right) a} = \frac{V}{a^2}$$

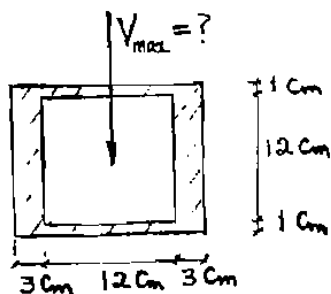
در مقطع مستطیلی تنش برشی حداکثر در محل چسب برابر است با:

$$\tau_2 = \frac{3V}{2A} = \frac{3V}{2 \cdot 2a^2} = \frac{3V}{4a^2}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{4}{3}$$

سراسری ۸۱

۴۵- در مقطع شکل مقابل، چنانچه تنش مجاز برشی مصالح مشکله $\frac{kg}{cm^2}$ ۹۶۰ باشد، ظرفیت برش قائم بر حسب ton کدام است ؟



- ۴۸/۱ (۱)
- ۵۸/۸ (۲)
- ۶۱/۵ (۳)
- ۱۱۸/۲ (۴)

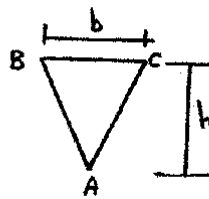
$\tau = \frac{VQ}{It}$ ⇒ ظرفیت برشی = $\frac{\tau(It)}{Q} = \frac{960 \left(\frac{18 \times 18^3}{12} - \frac{12 \times 12^3}{12} \right) \times 6}{2 \times (6 \times 3) \times 3 + 18 \times 1 \times 6.5} = 61132.8 kg = 61.5 ton$

مقدار فوق بر اساس تنش خرابی در میانه مقطع می باشد. از آنجا که ضخامت جدار در بالها کمتر است، باید تنش بالها را هم چک کنیم:

$$V = \frac{\tau(It)}{Q} = \frac{960(I) \times 2}{12 \times 1 \times 6.5} = 58781 kg = 58.8 ton$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است

۴۸- چنانچه نیروی برشی وارده بر مقطع مثلثی شکل نشان داده شده برابر V باشد، تنش برشی حداکثر در چه فاصله‌ای از نقطه A در روی مقطع ایجاد می‌شود؟



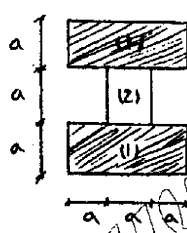
- (۱) $\frac{h}{2}$
 (۲) $\frac{h}{3}$
 (۳) $\frac{h}{4}$
 (۴) $\frac{2h}{3}$

آزاد ۸۹

۵۷- اگر برش تعیین کننده طراحی باشد کدام یک از مقاطع زیر اقتصادی تر است؟

- (۱) مستطیل
 (۲) مثلث
 (۳) دایره
 (۴) لوزی

آزاد ۹۱

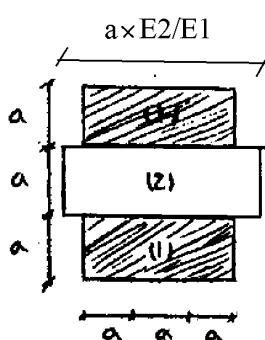


۵۹- در مقطع غیرهمگن مقابل، نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ چقدر باشد تا تنش برشی حداکثر ایجاد شده تحت نیروی برش قائم در قطعه ۲، پنج برابر قطعه ۱ شود؟

- (۱) ۴
 (۲) ۸
 (۳) ۱۶
 (۴) ۳۲

گزینه ۳

برای برابر شدن تنش های برشی باید نسبت VQ/It در دو نقطه نشان داده شده در شکل (مقطع تبدیل یافته) برابر باشد:

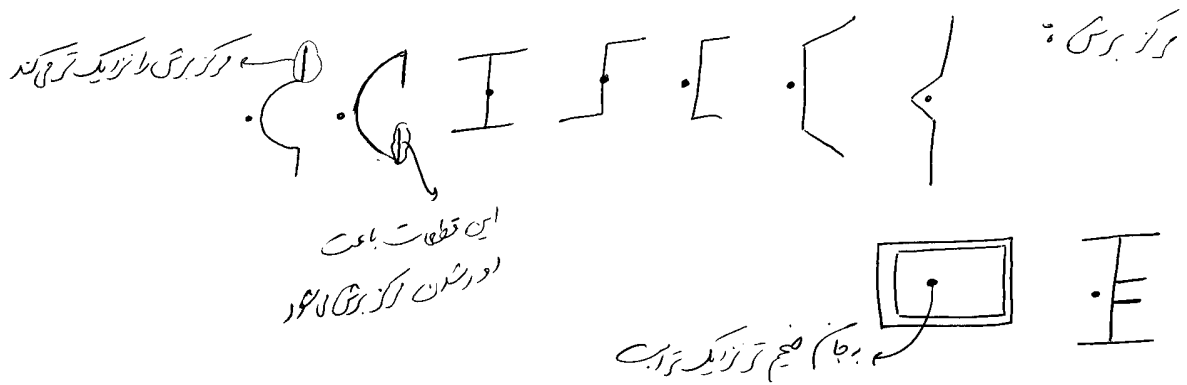


$$\tau_1 = \frac{VQ}{It} = \frac{V(a \times 3a \times a)}{I \times 3a}$$

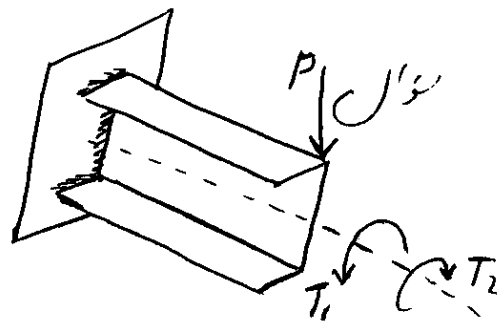
$$\tau_2 = \frac{E_2}{E_1} \times \frac{VQ}{It} = \frac{E_2}{E_1} \times \frac{V \left(a \times 3a \times a + \frac{aE_2}{E_1} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{4} \right)}{I \times \frac{aE_2}{E_1}}$$

$$\tau_2 = 5\tau_1 \rightarrow \frac{\left(a \times 3a \times a + \frac{aE_2}{E_1} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{4} \right)}{a} = 5 \frac{(a \times 3a \times a)}{3a}$$

$$\rightarrow \left(3 + \frac{1}{8} \frac{E_2}{E_1} \right) = 5 \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 16$$



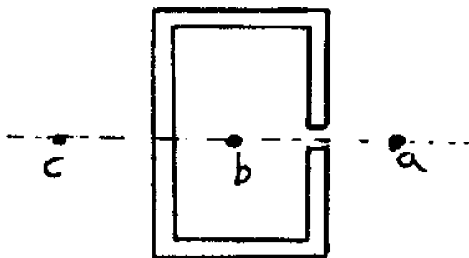
نیمه P بر مرکز برش دارد نشده در این صورت یعنی مقطع
 چه صورت خواهد بود (T_1 یا T_2) ؟



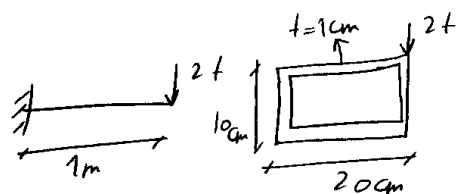
یا ضخیم T_1

آزاد ۹۱

۵۷- مرکز برش مقطع جدار نازک نشان داده شده کدام نقطه می‌تواند باشد؟

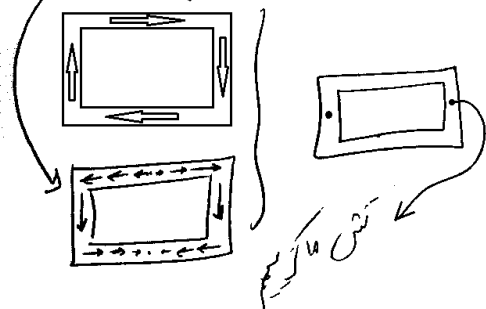


- a (۱)
- b (۲)
- c (۳)
- a و c (۴)



عمل: تنش برشی ماکزیمم را مقطع زیر!

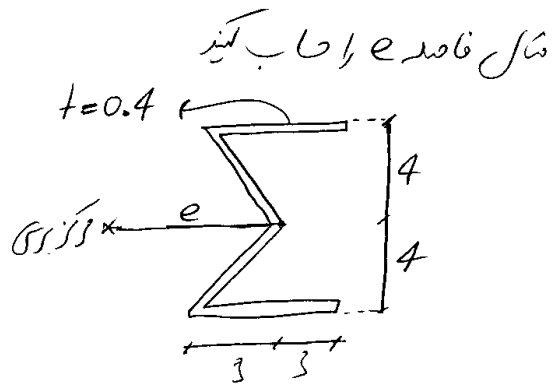
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{T}{2A_m t} = \frac{2000 \times (20 \times 1 \times 4.5 + 2 \times 4 \times 2)}{\left(\frac{20 \times 10^3}{12} - \frac{18 \times 8^3}{12}\right) \times 2} + \frac{2000 \times 10}{2(10 \times 1)(1)} = 176.6$$



تنش ماکزیمم

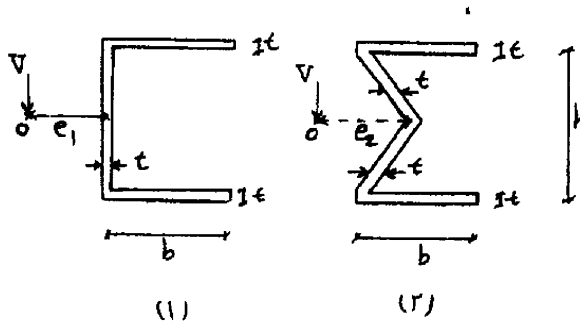
میانگین تنش

$$F_1 = \frac{6 \times 0.4}{2} \left(\frac{V(6 \times 0.4) \times 3.8}{I \times 0.4} \right) = 0.3V$$



$$I = 2 \times \left(0.4 \times 6 \times 3.8^2 + \frac{0.4 \times 5^3}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right) = 90.65$$

$$F_1 \times 7.6 = V \times e \rightarrow e = \frac{F_1 \times 7.6}{V} = \frac{0.3V \times 7.6}{V} = 2.28 \text{ cm}$$



اگر در مقاطع نشان داده شده نقاط O نشان دهنده مرکز ابرش مقطع باشد آنگاه نسبت $\frac{e_1}{e_2}$ کدام است؟

www.h3.com

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۲

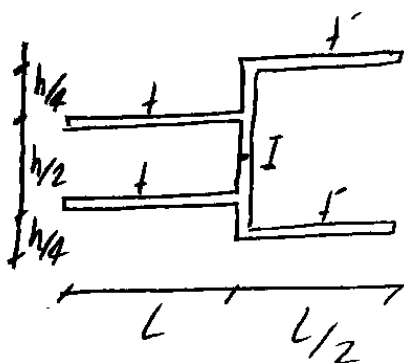
گزینه ۲

$$e_1 = \frac{Q}{2It} \times (bt) \times h = \frac{(bt) \times \frac{h}{2}}{2 \times \left[\frac{h^3 t}{12} + 2bt \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]} \times (bt) \times h = \frac{b^2}{\frac{h}{3} + 2b}$$

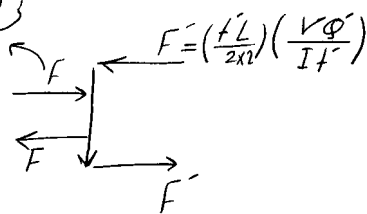
$$e_2 = \frac{Q}{2It} \times (bt) \times h = \frac{(bt) \times \frac{h}{2}}{2 \times \left[\frac{h^3 t}{12} + 2bt \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]} \times (bt) \times h = \frac{b^2}{\frac{h}{3} + 2b} \rightarrow e_1 = e_2$$

مثال:

اگر مرکز برش در I باشد رابطه بین t و t' را بدست آورید.



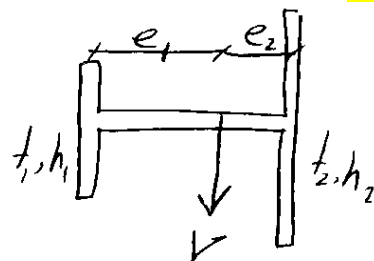
$= \left(\frac{tL}{2}\right) \left(\frac{VQ}{It}\right)$



$$F \times \frac{h}{2} = F' \times \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{tL}{2} \left(\frac{VQ}{It}\right) \times \frac{h}{2} = \left(\frac{t'L}{2}\right) \left(\frac{VQ}{I't'}\right) \times \frac{h}{4}$$

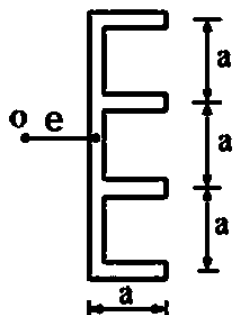
$$\Rightarrow \frac{t'Q'}{8} = \frac{tQ}{8} \rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{Q}{Q'} = \frac{(t \times L \times h/4)}{(t' \times L/2 \times h/2)} = 1$$

$e_1 = ?$ (کدام درست)



دکتری ۹۵

۱۸- در شکل زیر، مرکز برش در چه فاصله‌ای از جان مقطع قرار دارد؟ (ضخامت در همه جا یکسان و برابر t است)

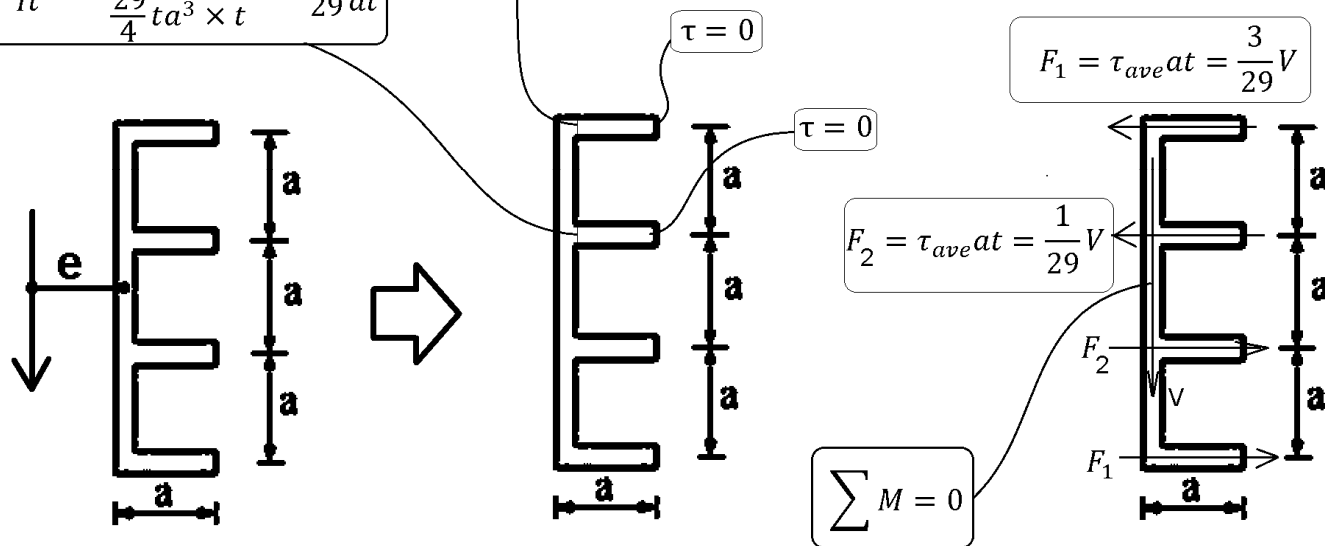


- ۰٫۲۸۸ a (۱)
- ۰٫۳۰۵ a (۲)
- ۰٫۳۲۵ a (۳)
- ۰٫۳۴۵ a (۴)

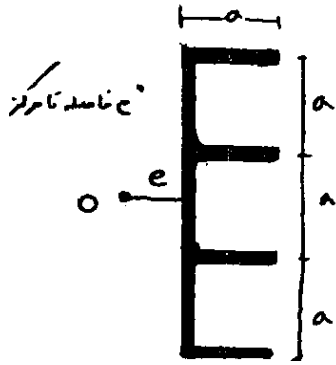
$$I = I_{\text{جان}} + I_{\text{بالها}} = \left(\frac{t(3a)^3}{12} \right) + \left(2 \times at \times \left(\frac{3}{2}a \right)^2 + 2 \times at \times \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) = \left(\frac{9ta^3}{4} \right) + 5ta^3 = \frac{29}{4}ta^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V(at \times 1.5a)}{\frac{29}{4}ta^3 \times t} = \frac{6}{29} \frac{V}{at}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V(at \times 0.5a)}{\frac{29}{4}ta^3 \times t} = \frac{2}{29} \frac{V}{at}$$



$$\sum M = 0 \rightarrow 2(F_1 \times 1.5a + F_2 \times 0.5a) = Ve \rightarrow e = \frac{3F_1a + F_2a}{V} = \frac{10}{29}a = 0.34a$$



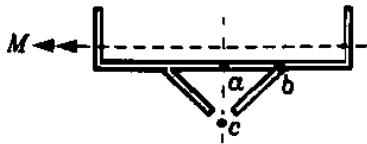
۲۷- مرکز برش مقطع زیر در چه فاصله ای از جان مقطع قرار دارد؟ (ضخامت ثابت و برابر a می باشد).

- ۱) $0.28 a$
- ۲) $0.4 a$
- ۳) $0.46 a$
- ۴) $0.34 a$

گزینه ۴

سراسری ۷۸

۴- مرکز پیچش مقطع شکل زیر کدام نقطه است؟



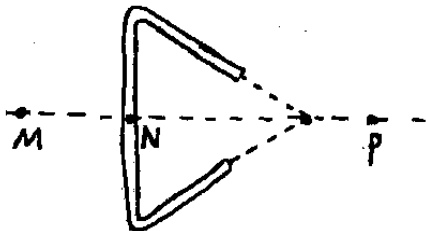
- ۱) a
- ۲) b
- ۳) c

۴) بر مرکز مقطع منطبق است که هیچ کدام از نقاط a , b و c نیست.

گزینه ۳

آزاد ۸۳

۲۶- در مقطع زیر محل مرکز برش کجاست؟



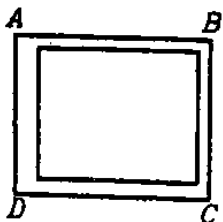
- ۱) M
- ۲) N
- ۳) P

۴) بسته به ابعاد مقطع هر کدام از گزینه ها می تواند صحیح باشد.

گزینه ۱

آزاد ۸۶

۵۴- در مقطع قوطی شکل زیر محل مرکز برش کجاست؟



- ۱) در داخل مقطع و نزدیک به جان ضخیمتر می باشد.
- ۲) در داخل مقطع و نزدیک به جان نازکتر می باشد.
- ۳) در خارج مقطع و نزدیک به جان ضخیمتر می باشد.
- ۴) در خارج مقطع و نزدیک به جان نازکتر می باشد.

۹- اشکال زیر مقاطع یک تیره طره را که در انتهای آزاد تحت بار P قرار گرفته است، نشان می‌دهد. در کدام حالت عضو بدون

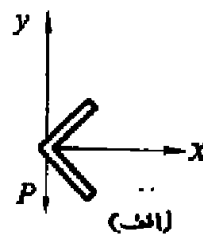
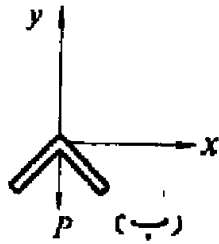
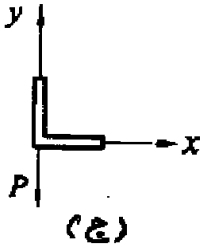
پیچش خم می‌شود؟

(۱) در حالت (ج)

(۲) در حالت (ب)

(۳) در حالت (الف)

(۴) در هر سه حالت



گزینه ۴

در هر سه حالت نیروی از مرکز برش عبور می‌کند و پیچش نخواهیم داشت.

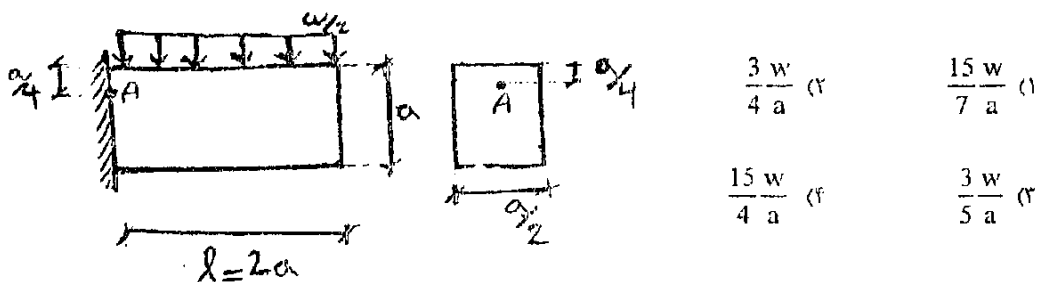
۱۴-۷- ترکیب برش، پیچش و خمش

$M + \overset{\circ}{V} + T \leftarrow A$
 $\overset{\circ}{M} + V + T \leftarrow B =$
 $\overset{\circ}{M} + V + T \leftarrow C$
 $M + \overset{\circ}{V} + T \leftarrow D$

$A: \begin{cases} \tau = \frac{(PK)R}{J} = \frac{2P}{\pi R^2} \\ \sigma = \frac{(PK)R}{\frac{\pi R^4}{4}} = \frac{4P}{\pi R^2} \end{cases}$

$B: \begin{cases} \tau = \frac{PK}{J} + \frac{4}{3} \frac{P}{\pi R^2} = \frac{16}{3} \frac{P}{\pi R^2} \\ \sigma = 0 \end{cases}$

۵۸- حداکثر تنش برشی ایجاد شده در نقطه A (ناشی از اثرات برش و خمش) کدام است؟



$$M = \frac{w}{2} \times \frac{(2a)^2}{2} = wa^2$$

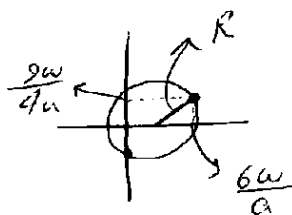
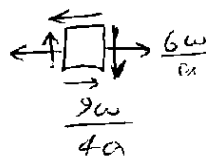
$$V = \frac{w}{2} \times 2a = wa$$

۵۸

رکبگیه را رعایت کن

$$\sigma = \frac{M_c}{I} = \frac{wa^2 \times \frac{a}{4}}{\frac{a}{2} \times \frac{a^3}{12}} = \frac{6w}{a}$$

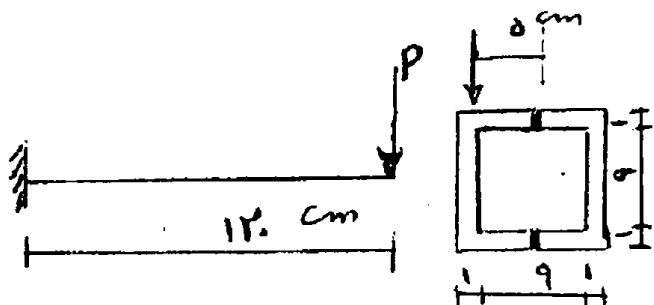
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{wa \times (\frac{a}{4}) \times (\frac{a}{2}) \times \frac{3a}{8}}{\frac{a}{2} \times \frac{a^3}{12} \times \frac{a}{2}} = \frac{9w}{4a}$$



$$\tau_{max} = R = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{9w}{4a}\right)^2 + \left(\frac{3w}{a}\right)^2} = \frac{3w}{a} \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{15w}{4a}$$

۴۶- مقطع جدار نازک روبه‌رو، مقطع تبری کنسولی است که بار P در انتهای آن و در گوشه فوقانی وارد شده است. این مقطع متشکل از دو ناودانی چوبی است که در بالا و پایین به وسیله چسبی با مقاومت برشی مجاز ۵ مگاپاسکال به هم وصل شده‌اند. حداکثر مقدار مجاز P چند کیلو نیوتن است؟



۱۲ (۱)

۴۰ (۲)

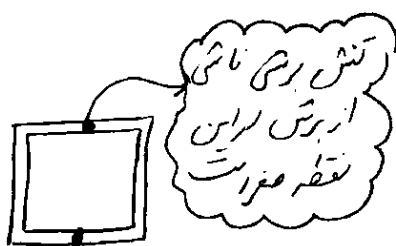
۲۰ (۳)

۵۰ (۴)

46

تیر تحت اثر ترکیبی از خمش، برش و سایش قرار دارد
از آنجا که تنش مجاز چوب را نداریم، فقط باید

حساب را کنترل کنیم:



$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

تنش برشی

در مقطع جدار نازک بسته داریم ←

$$\tau = \frac{(P \times 5)}{2 \times (10 \times 10) \times 1} = 0.025 P \frac{N}{cm^2}$$

این تنش باید کمتر از مقدار مجاز آن (5 MPa) باشد

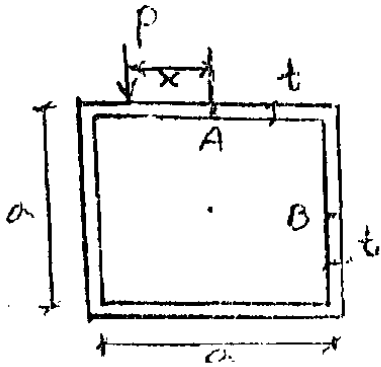
$$\rightarrow 0.025 P < \frac{500 N}{cm^2} \rightarrow P < 20000 N \Rightarrow P < 20 kN$$

نکته: محل چسب علاوه بر تنش برشی ناشی از سایش و گشت اثر تنش محوری ناشی از خمش نیز قرار دارد



باید خاندن ایمن تنش برشی ماکزیم بیشتر از τ خواهد بود $(\sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2})$
ولی این تنش برشی دیگر در صفحه چسب نخواهد بود (بر حسب اثر می‌کنند)

۵۹- مقدار x چقدر باشد تا تنش برشی در نقاط A و B (وسط اضلاع مقطع) با هم برابر شود؟



$$\frac{3}{16} a \quad (۲)$$

$$\frac{9}{16} a \quad (۱)$$

$$\frac{9}{10} a \quad (۲)$$

$$\frac{9}{2} \quad (۲)$$

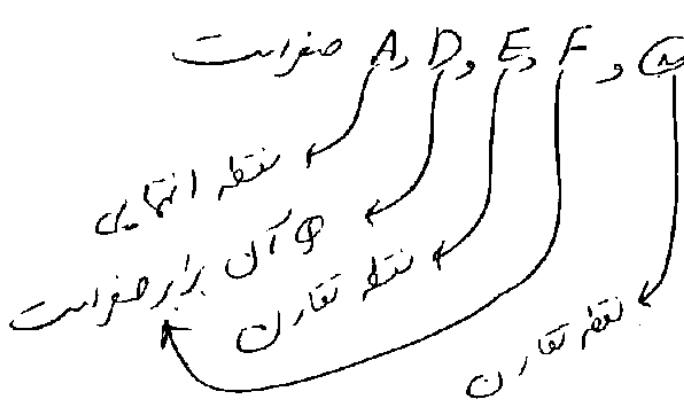
$$\tau_A = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = 0 + \frac{P_n}{2a^2 t}$$

۵۲

$$\tau_B = \frac{VQ}{It} + \frac{T}{2A_m t} = \frac{P(a + x \frac{a}{2} + 2 \frac{a}{2} t + x \frac{a}{4})}{\frac{2a^3 t}{3} \times 2t} - \frac{P_n}{2a^2 t}$$

$$\rightarrow \tau_B = \frac{9P}{16at} - \frac{P_n}{2a^2 t} \Rightarrow \tau_A = \tau_B \Rightarrow \frac{P_n}{a^2 t} = \frac{9P}{16 \cdot at} \rightarrow n = \frac{9a}{16}$$

۹۰، ۳، ۲۶
صبر زیاد

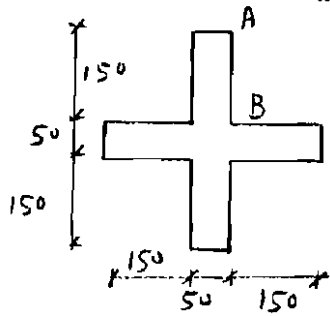


۶۰ تنش در نقاط

گزینه ۴ صحیح است

۱۴-۸- سهم برش

۵۷- مقطع صلیبی مطابق شکل روپرو تحت اثر نیروی برشی V قرار دارد. چه سهمی از این نیرو توسط جان AB تحمل می‌گردد:

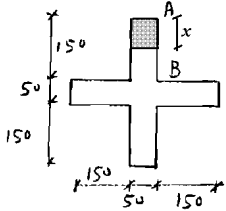


٪۲۵(۱)

٪۳۵(۲)

٪۲۹(۳)

٪۴۴(۴)



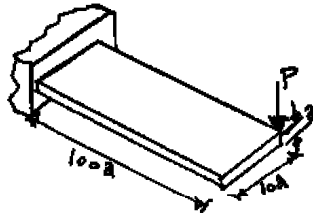
$$\left. \begin{aligned} Q_x &= 50x \times \left(175 - \frac{x}{2}\right) \\ \tau_x &= \frac{VQ}{It} = \frac{V \times 50x \times \left(175 - \frac{x}{2}\right)}{I \times 50} \\ I &= \frac{50 \times 350^3}{12} + \frac{300 \times 50^3}{12} = 181770833 \end{aligned} \right\} V_{AB} = \int_0^{150} \tau_x (50 \times dx) = \int_0^{150} \frac{V \times 50x \times \left(175 - \frac{x}{2}\right)}{I \times 50} \times 50 dx$$

$$V_{AB} = \frac{50V}{I} \times \int_0^{150} x \left(175 - \frac{x}{2}\right) dx = 0.387V$$

۹-۱۴- تغییر شکل برشی

سراسری ۹۳- دکتری

۷- یک تیر با مقطع مستطیل و به صورت کنسول تحت بار P در انتهای گوشه مطابق شکل قرار می‌گیرد. هرگاه مدول ارتجاعی آن E و ضریب پواسون ν و رفتار مصالح کاملاً الاستیک فرض شوند، تغییر مکان قائم انتهای آزاد تحت بار P کدام است؟



$$\delta_v \approx \frac{1000P}{Ea} \{4000 + 15(1+\nu)\} \quad (۱)$$

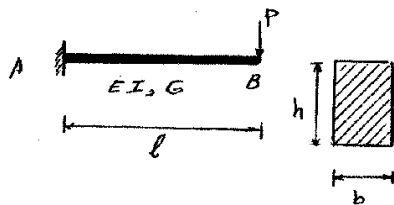
$$\delta_v \approx \frac{410000P}{Ea} \quad \text{اثر پیچش قابل صرف‌نظر نبوده و تغییر مکان قائم} \quad (۲)$$

$$\delta_v \approx \frac{400100P}{Ea} \quad \text{اثر پیچش مهم و تغییر مکان قائم} \quad (۳)$$

$$\delta_v \approx \frac{400000P}{Ea} \quad \text{اثر پیچش قابل صرف‌نظر بوده و تغییر مکان قائم} \quad (۴)$$

سراسری ۸۹

۵۸- تغییر مکان قائم نقطه B با در نظر گرفتن انرژی برشی و خمشی نسبت به حالتی که فقط انرژی خمشی در نظر گرفته شود



چند درصد افزایش می‌یابد؟ فرض کنید $(\frac{E}{G} = 2/4)$ ، $(\frac{l}{h} = 10)$

- (۱) ۷۱/۵۰۲۲
- (۲) ۷۰/۲۲
- (۳) ۷۱/۵۲۲
- (۴) ۷۱/۲۲

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{برشی}} &= \frac{PL}{GA_v} = \frac{P(10h)}{\left(\frac{E}{2.4}\right)\left(\frac{5}{6}bh\right)} = \frac{28.8P}{Eb} \\ \Delta_{\text{خمشی}} &= \frac{PL^3}{3EI} = \frac{P(10h)^3}{3(E)\left(\frac{bh^3}{12}\right)} = \frac{4000P}{Eb} \end{aligned} \right\} \Delta_{\text{کل}} = \frac{4028.8P}{Eb}$$

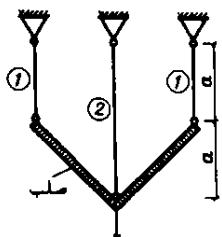
$$\text{درصد افزایش} = \frac{\Delta_{\text{برشی}}}{\Delta_{\text{خمشی}}} = \frac{28.8}{4000} = 0.0072 = \%0.72$$

۱۵- مدل سازی با فنر

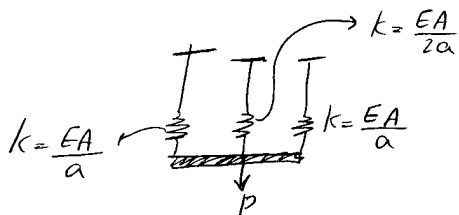
سراسری ۸۰

جنس میله‌های ۱ و ۲ یکسان و سطح مقطع آنها مساوی است. زیر اثر بار P نیروهای F_1 و F_2

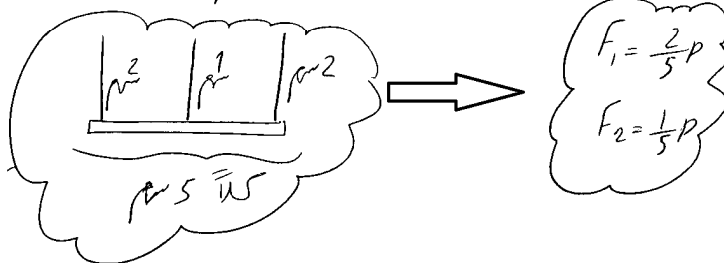
وارد بر میله‌های (۱) و (۲) چقدر است؟



- (۱) $F_1 = F_2 = \frac{P}{3}$
- (۲) $F_1 = P$, $F_2 = 0$
- (۳) $F_1 = \frac{P}{4}$, $F_2 = \frac{P}{2}$
- (۴) $F_1 = 0.4P$, $F_2 = 0.2P$

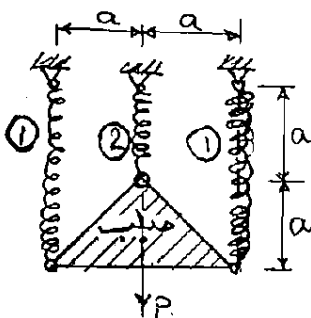


باتوجه به تقارن میله صلب حرکت قائم خواهد داشت بنابراین نیروی P بر نسبت سستی تقسیم می‌شود



سراسری ۸۲

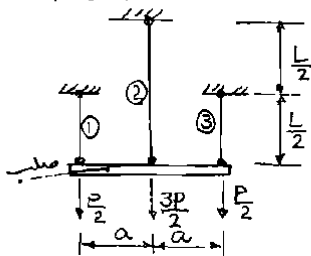
۳۸- در شکل روبرو سختی هر سه فنر مساوی است. نیروی وارد به هر فنر چقدر است؟



- (۱) $F_1 = F_2 = \frac{P}{2}$
- (۲) $F_1 = 0$, $F_2 = P$
- (۳) $F_1 = \frac{P}{4}$, $F_2 = \frac{P}{2}$
- (۴) $F_1 = \frac{P}{6}$, $F_2 = \frac{2P}{3}$

سراسری ۸۱

۳۹. در شکل مقابل میله‌های ۱، ۲ و ۳ با جنس و سطح مقطع یکسان تحت اثر نیروهای وارده قرار گرفته‌اند. نیروی وارده به هر کدام از میله‌ها چقدر است؟

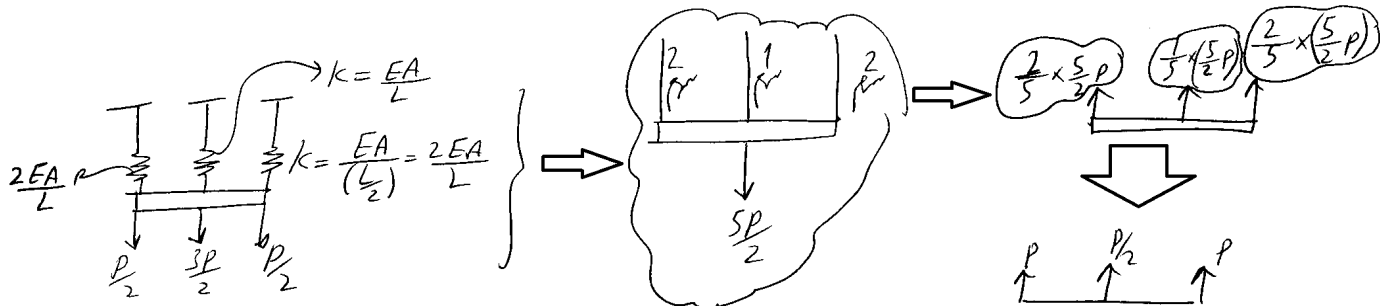


$$P_1, \Delta P, P \quad (1)$$

$$\frac{P}{2}, \frac{3P}{2}, \frac{P}{2} \quad (2)$$

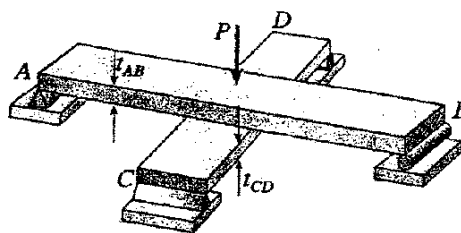
$$\frac{\Delta P}{8}, \frac{\Delta P}{4}, \frac{\Delta P}{8} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta P}{6}, \frac{\Delta P}{6}, \frac{\Delta P}{6} \quad (4)$$



سراسری ۸۹

تیرهای AB و CD از یک جنس و با عرض یکسان مطابق شکل عمود بر همدیگر در یک صفحه روی همدیگر قرار گرفته‌اند. قبل از اعمال بار P هیچ نیروی در تیرها وجود ندارد (از وزن آنها صرف‌نظر می‌شود) در صورتیکه $L_{AB} > L_{CD}$ باشد، نسبت t_{AB} / t_{CD} چقدر باشد تا اینکه عکس‌العمل‌های هر چهار تکیه‌گاه برابر شوند؟

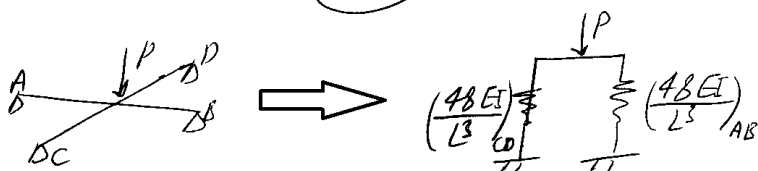
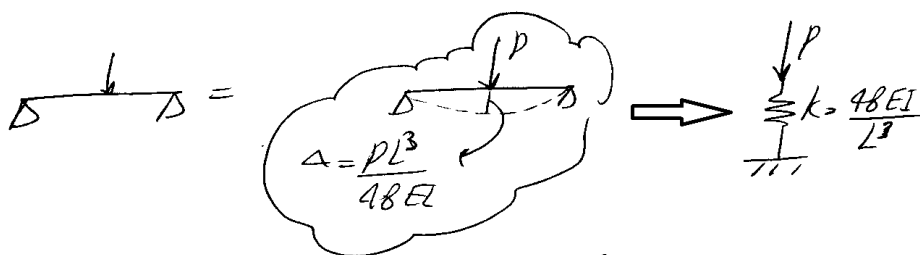


$$\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{CD}}{L_{AB}} \quad (1)$$

$$\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{\sqrt{2}L_{CD}} \quad (2)$$

$$\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{\sqrt{2}L_{AB}}{L_{CD}} \quad (3)$$

$$\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}} \quad (4)$$

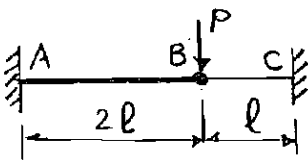


مستقیمه که عکس‌العمل یک‌گانه
 است هم که باید برابر است

$$\left(\frac{48E \frac{kt^3}{L^3}}{L^3} \right)_{AB} = \left(\frac{48E \frac{kt^3}{L^3}}{L^3} \right)_{CD} \Rightarrow \left(\frac{t}{L} \right)_{AB} = \left(\frac{t}{L} \right)_{CD} \rightarrow \frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$$

سراسری ۸۲

۳۳- مقطع تیر شکل زیر مربع مستطیل به پهنای ثابت است ولی ارتفاع مقطع در قسمت AB دو برابر قسمت BC می باشد نسبت $\frac{\sigma_{A,max}}{\sigma_{C,max}}$ چقدر است؟



چقدر است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱/۲ (۳)
- ۱/۴ (۴)

$I_{AB} = 8I_{BC}$
 $L_{AB} = 2L_{BC}$
 $k_{AB} = k_{BC}$

$k = \frac{3EI}{L^3}$

$\sigma_A = \frac{6(PL)}{b(2h)^2}$
 $\sigma_C = \frac{6(PL/2)}{bh^2}$

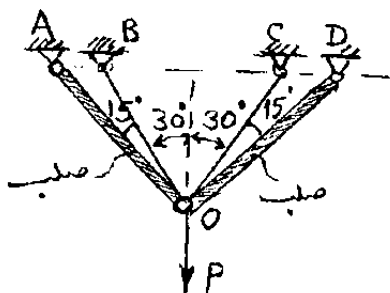
$\rightarrow \frac{\sigma_A}{\sigma_C} = \frac{6/4}{6/2} = \frac{1}{2}$

$\sigma = \frac{6M}{bh^2}$

$M = PL$ $M = \frac{PL}{2}$

سراسری ۸۳

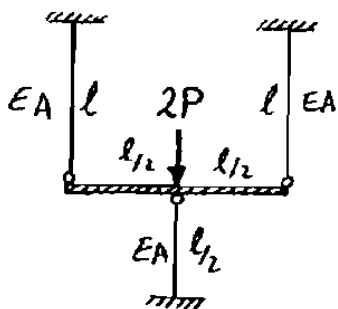
۴۷- در شکل روبرو میله های OB و OC الاستیک و یکسان می باشند. نیروی وارد به میله ها کدام است؟



- (۱) نیروهای هر کدام از میله ها $\frac{P}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$
- (۲) میله های الاستیک $\frac{P}{2\sqrt{3}}$ ، میله های صلب $\frac{P}{2\sqrt{2}}$
- (۳) میله های الاستیک $\frac{P}{\sqrt{3}}$ ، میله های صلب صفر
- (۴) میله های الاستیک صفر، میله های صلب $\frac{P\sqrt{2}}{2}$

سراسری ۸۳

۵۰- میله صلب ABC توسط سه میله مطابق شکل نگاه داشته شده است. نیروی سه میله به ترتیب برابر است با:



- (۱) $\frac{P}{2}, \frac{2P}{3}, \frac{P}{2}$
- (۲) $\frac{2P}{3}, \frac{2P}{3}, \frac{2P}{3}$
- (۳) $\frac{2P}{4}, \frac{P}{2}, \frac{2P}{4}$
- (۴) $\frac{P}{2}, P, \frac{P}{2}$

EA/L EA/L EA/L

$EA/(L/2) = 2EA/L$

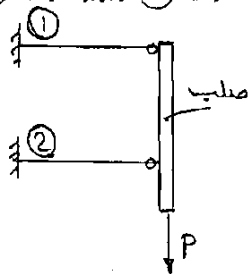
$\frac{2 \times 2P}{4}$

$\frac{1 \times 2P}{4}$ $\frac{2P}{4}$

$\frac{P}{2}$ P $\frac{P}{2}$

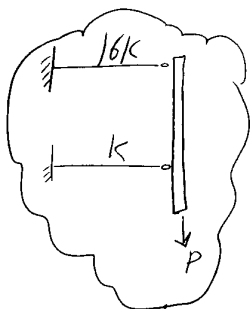
سراسری ۸۴

۵۷- دو میله ۱ و ۲ از یک جنس و با یک طول و هر دو با مقطع دایره می‌باشند، به طوری که قطر میله ۱ دو برابر قطر میله ۲ است.



نسبت $\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{2max}}$ چقدر است؟

۱ (۱)
۲ (۲)
$\frac{1}{2}$ (۳)
$\frac{1}{8}$ (۴)



نسبتی مخفی را با برزخ بگیریم $(\frac{3EI}{L^3})$ از آن بی که تکلی میله بالایی رو برابر است

پس I آن نیز ۲۴ برابر است

$$\sigma_1 = \frac{(\frac{16P}{17}L)(2R)}{\frac{\pi}{4}(2R)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{(\frac{P}{17}L)R}{\frac{\pi}{4}R^2}$$

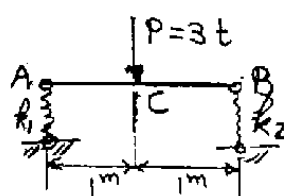
$$\rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

سراسری ۸۹

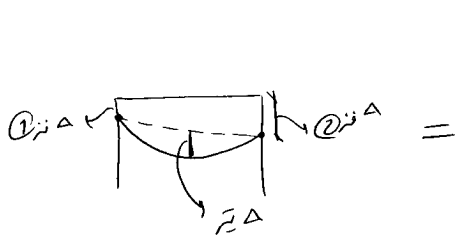
۵۶- تیر شکل رویه‌رو روی دو فنر F_1 و F_2 قرار گرفته است به طوری که $k_1 = 2 \frac{t}{cm}$

و $k_2 = 1 \frac{t}{cm}$ است. اگر تغییر مکان وسط تیری بر روی دو تکیه‌گاه ساده مساوی باشد، $\frac{PL^3}{48EI}$

تغییر مکان C وسط تیر نشان داده شده چند سانتی‌متر است؟ $EI = 10^9 \text{ kgcm}^2$



- ۱/۶۲۵ (۱)
- ۱/۲۵ (۲)
- ۱/۱۲۵ (۳)
- ۲/۲۵ (۴)



$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

$$= \frac{1.5 + 1.5}{2} \text{ cm}$$

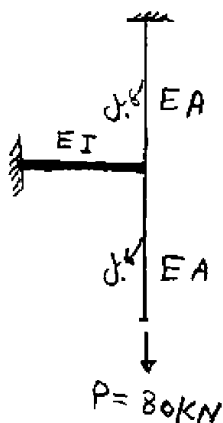
$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$= \frac{3 \times 200^3}{48 \times 10^6} \text{ cm}$$

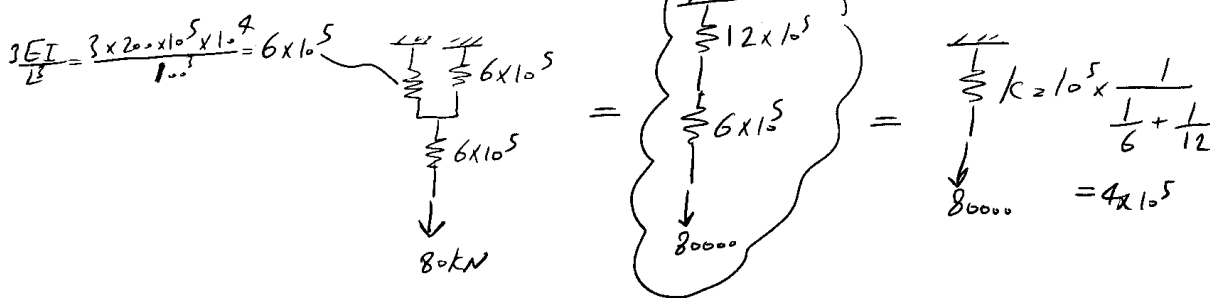
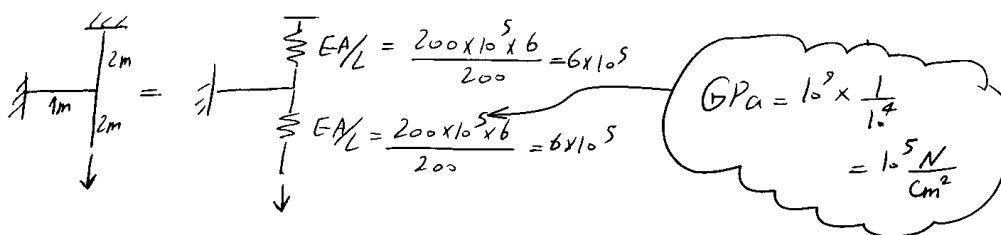
$$\rightarrow \Delta = 1.125 + 0.5 = 1.625 \text{ cm}$$

سراسری ۸۹

۵۷- بار $P = 80 \text{ kN}$ به انتهای کابل به طول ۲ متر مطابق شکل وارد می‌شود. انتهای کابل مزبور به انتهای یک تیر کنسول به طول یک متر بسته شده و همچنین کابل دیگری به طول ۲ متر نیز انتهای تیر را به سقف بسته است. $E = 200 \text{ GPa}$ و معان اینرسی تیر برابر 10000 cm^4 و سطح مقطع هر کابل برابر 6 cm^2 می‌باشد. مقدار جابه‌جایی قائم محل اعمال بار $P = 80 \text{ kN}$ بر حسب mm چقدر است؟



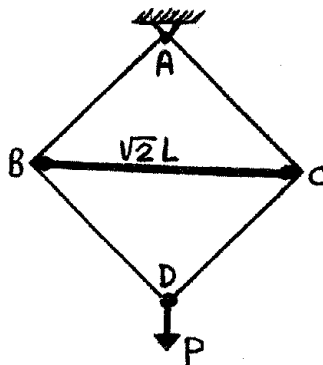
- ۴ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- $\frac{4}{9}$ (۴)



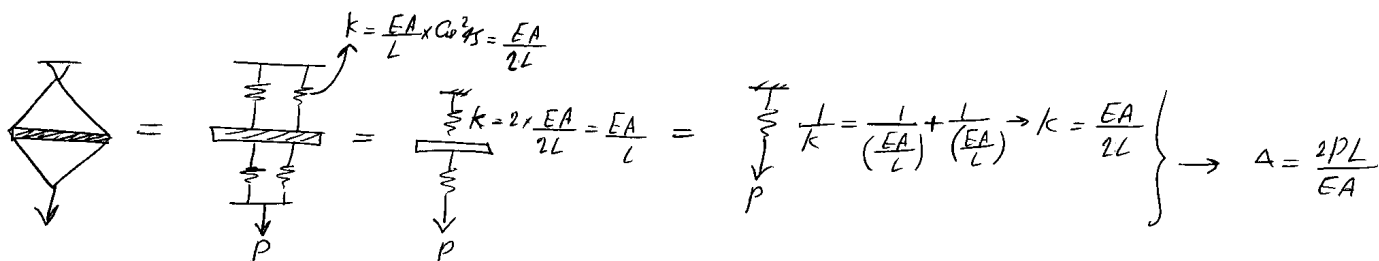
$$\Delta = \frac{80000}{4 \times 10^5} = 0.2 \text{ cm} = 2 \text{ mm}$$

سراسری ۸۹

۵۴- در سازه نشان داده شده میله BC صلب است. جابه‌جایی نقطه D کدام است؟ (AE و L برای کلیه اعضای مورب ثابت است).

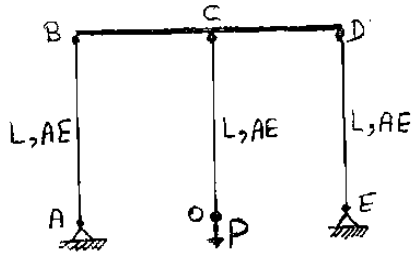


- $\frac{PL}{AE}$ (۱)
- $\frac{\sqrt{2}PL}{AE}$ (۲)
- $\frac{PL}{\sqrt{2}AE}$ (۳)
- $\frac{\sqrt{2}PL}{AE}$ (۴)



سراسری ۸۶

۴۷- تغییر مکان نقطه O در صورت صلب بودن عضو BCD چقدر است؟



- (۱) $\frac{PL}{AE}$
- (۲) $\frac{2PL}{2AE}$
- (۳) $\frac{PL}{2AE}$
- (۴) $\frac{PL}{3AE}$

با توجه به تقارن نیروی میله‌های کناری $\frac{P}{2}$ است

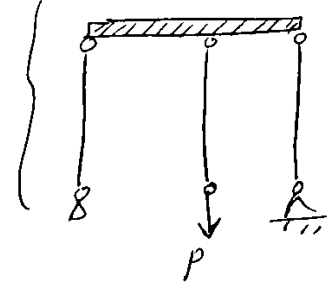
$$\Delta = \frac{PL}{2EA}$$

میله کناری

$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$

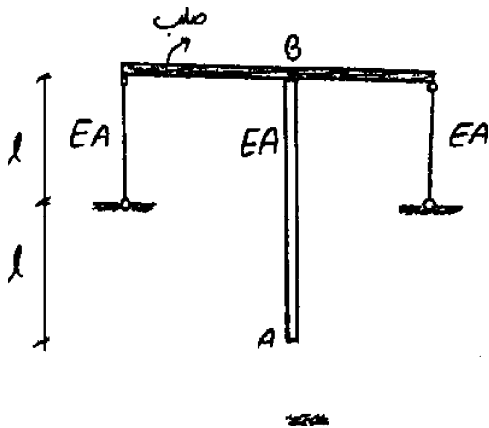
میله وسط

$$\Delta = \frac{PL}{2EA} + \frac{PL}{EA} = \frac{3PL}{2EA}$$



آزاد ۹۱

۴۱- در سازه متقارن نشان داده شده وزن واحد طول میله AB برابر با q می‌باشد و از وزن سایر اعضاء صرف‌نظر شده است. تغییر مکان نقطه A کدام است؟



(۲) $3 \frac{q\ell^2}{EA}$

(۱) $2 \frac{q\ell^2}{EA}$

(۴) $5 \frac{q\ell^2}{EA}$

(۳) $4 \frac{q\ell^2}{EA}$

۵۹- نواری فلزی بطول ۲ متر و به پهنای ۱۰ cm و به ضخامت یک سانتی متر را که وزن مخصوص آن $\frac{6 \text{ grf}}{\text{cm}^3}$ می باشد روی دو تکیه گاه در دو

انتهای آن قرار داده ایم. جابجایی آن در وسط که از رابطه $\frac{\Delta q L^4}{384 E I}$ بدست می آید مساوی سه سانتی متر شده است. مقدار E چقدر است؟

(بر حسب $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$)

- ۱) 0.25×10^4 (۲) 0.15×10^6 (۳) 4×10^4 (۴) 10^8

$q = 6 \times 1 \times 10$

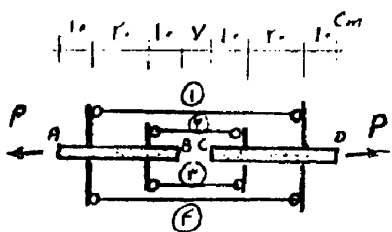
$$\Delta = 3 \Rightarrow \frac{5 \times 60 \times (200)^4}{384 E \times 10 \times 1^3} = 3 \rightarrow E = 5 \times 10^8 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2} = 5 \times 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

۵۴- در شکل مقابل دو میله AB و CD توسط چهار میله ۱ و ۲ و ۳ و ۴ متصل شده و تحت دو نیروی p قرار گرفته است. نیروهای میله های ۱ و ۲ به ترتیب چند تن می باشند؟

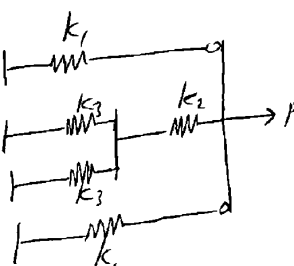
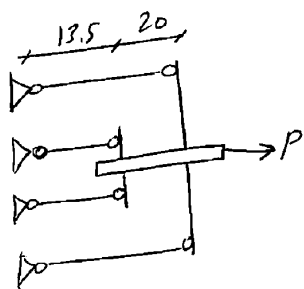
اعضاء AB و CD: $A = 10 \text{ cm}^2$ $E = 10^8 \text{ kg/cm}^2$

میله های ۱ و ۲ و ۳ و ۴: $A = 1 \text{ cm}^2$ $E = 2 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$

- ۱) ۱.۰۵ ، ۳.۹۵
 ۲) ۳.۰۵ ، ۱.۹۵
 ۳) ۱.۹۵ ، ۳.۰۵
 ۴) ۳.۹۵ ، ۱.۰۵



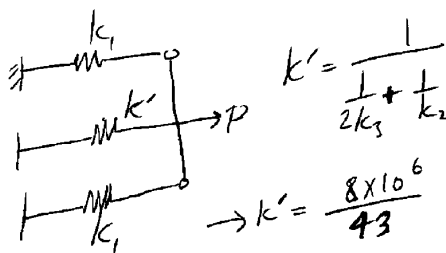
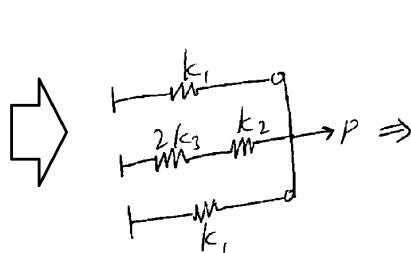
با توجه به تقارن، هر کدام از میله ها را یک فنر فرض می کنیم:



$$k_1 = \frac{EA}{L} = \frac{2 \times 10^6 \times 1}{33.5}$$

$$k_2 = \frac{EA}{L} = \frac{10^6 \times 10}{20}$$

$$k_3 = \frac{EA}{L} = \frac{2 \times 10^6 \times 1}{13.5}$$



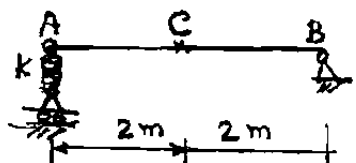
$$k' = \frac{1}{\frac{1}{2k_3} + \frac{1}{k_2}}$$

$$\rightarrow k' = \frac{8 \times 10^6}{43}$$

$$\textcircled{1} \Delta p = \frac{k_1}{2k_1 + k'} \times p = 1.95 \text{ ton}$$

$$\textcircled{2} \Delta p = \frac{1}{2} \left(\frac{k'}{2k_1 + k'} \right) \times 10 = 3.05 \text{ ton}$$

۴۲- بر تیر شکل روبرو بار گسترده‌ای به شدت $۶۰۰ \frac{kg}{m}$ وارد می‌شود. ضریب فنر $k = ۲۰۰۰ \frac{kg}{cm}$ و $I = ۵۰۰۰ cm^4$

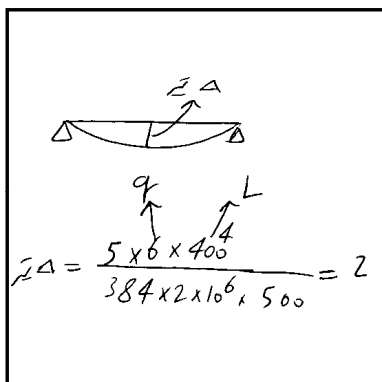
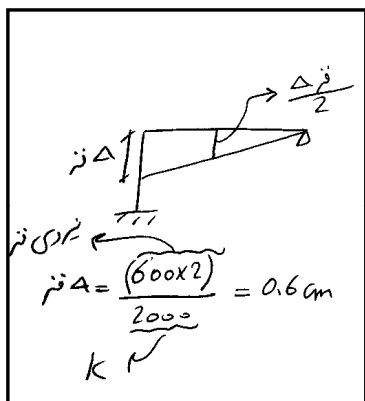


$E = ۲ \times ۱۰^۶ \frac{kg}{cm^2}$. تغییر مکان وسط دهانه بر حسب cm چقدر است؟

- (۱) ۲٫۶
- (۲) ۲٫۳
- (۳) ۲
- (۴) ۱٫۷

$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI}$$

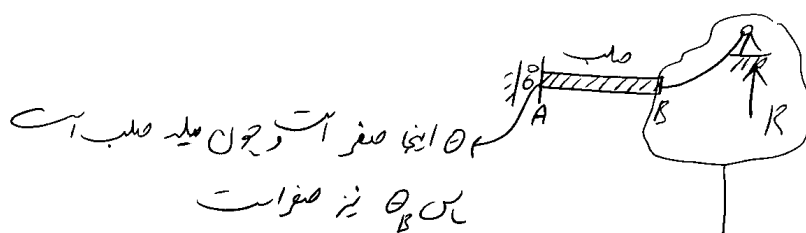
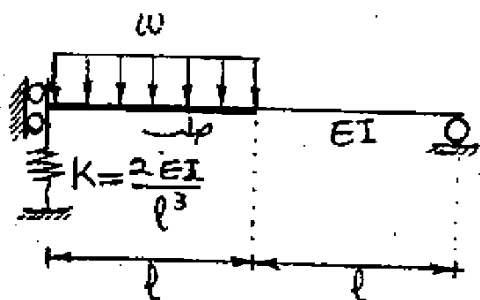
δ تغییر مکان وسط دهانه تیر ساده تحت بار گسترده q می‌باشد.



$$\Delta = \frac{0.6}{2} + 2 = 2.3$$

۷۲- در تیر شکل مقابل، نیرو در فنر کدام است؟

- (۱) $۰.۱۵ wL$
- (۲) $۰.۳ wL$
- (۳) $۰.۴ wL$
- (۴) $۰.۲ wL$



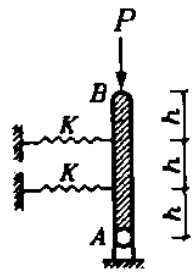
θ_B صفر است و این قسمت مانند یک تیر آزاد است

$\frac{2EI}{L^3} \uparrow \quad \frac{1EI}{L^3} \uparrow \rightarrow$ نیروی فنر $= \frac{2}{2+3} \times (w \times L) = \frac{2}{5} wL = 0.4wL$

۱-۱۶-کمانش ستون صلب

سراسری ۷۹

مطلوبست محاسبه و تعیین بار بحرانی سازه در شکل مقابل:

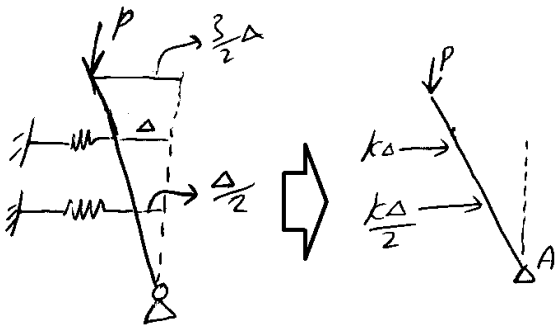


(۲) $\frac{4Kh}{3}$

(۱) $\frac{5Kh}{3}$

(۴) $\frac{Kh}{2}$

(۳) $2Kh$

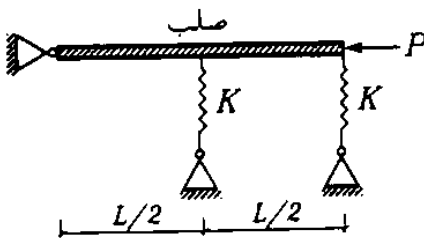


ابتدا تغییر شکل سازه را تصور می‌کنیم:

$\sum M_A = 0 \rightarrow k\Delta \times 2h + \frac{k\Delta}{2} \times h - P \times \frac{3\Delta}{2} = 0$
 $\rightarrow P = \frac{5Kh}{3}$

تمرین: سراسری ۷۴

۲- بار بحرانی شکل مقابل چقدر است؟

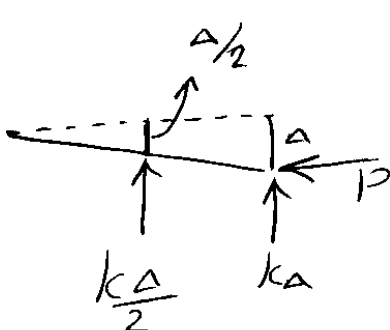


(۲) $\frac{5KL}{4}$

(۱) KL

(۴) ∞

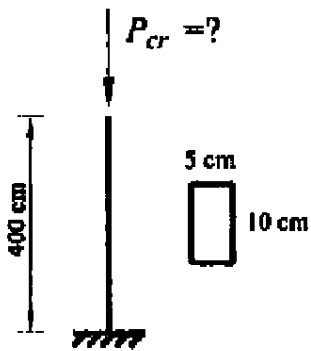
(۳) $\frac{3KL}{4}$



$\rightarrow P_{\Delta} = \frac{k\Delta}{2} \times \frac{L}{2} + k\Delta \times L$
 $\rightarrow P = \frac{5kL}{4}$

سراسری ۹۲- دکتری

۶- بار بحرانی ستون روبه‌رو، چند تن است؟ مدول ارتجاعی $E = 2 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ است.



۳/۲۱ (۱)

۲۶/۲۳ (۲)

۱۲/۸۵ (۳)

۵۱/۴۰ (۴)

آزاد ۸۵

۸۰- در ستون زیر بار فشاری P چنان است که همواره امتداد آن از تکیه گاه A می‌گذرد. بار بحرانی ستون چقدر است؟



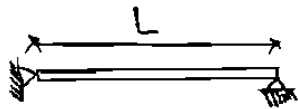
$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ (۱)

$\frac{\pi^2 EI}{3l^2}$ (۲)

$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ (۳)

$\frac{\pi^2 EI}{2l^2}$ (۴)

۴۰- مقدار تغییرات درجه حرارتی (ΔT) که قادر است ستون در سر مفصلی بطول L و ضریب انبساطی α را به حد کمانش برساند، کدام است؟



$$\frac{2\pi^2 I}{A\alpha L^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi^2 I}{2A\alpha L^2} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi^2 EI}{\alpha L^2} \quad (۱)$$

$$\frac{\pi^2 I}{A\alpha L^2} \quad (۳)$$

نوعی کمر که به علت حرارت در مقطع ایستاده در بر

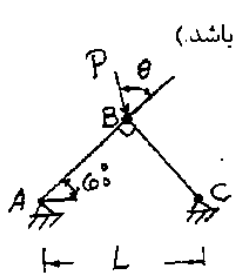
$$P = (\alpha \Delta T L) \frac{EA}{L}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$\alpha \Delta T L \frac{EA}{L} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow \Delta T = \frac{\pi^2 I}{\alpha L^2 A}$$

نوعی کمانش

۴۱- خرابی ABC از دو میله باریک یا مقطع و جتس یکسان تشکیل شده است. با فرض اینکه فرو ریختن خرابی در اثر کمانش اعضای آن صورت گیرد، تحت چه زاویه « θ » می توان بیشترین بار P را بر خرابی وارد نمود؟ (با فرض اینکه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ باشد).



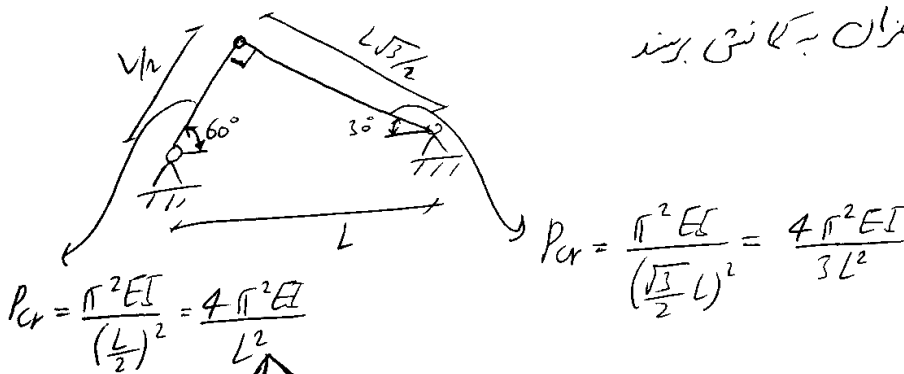
$$\tan \theta = \sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\cot \theta = \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (۳)$$

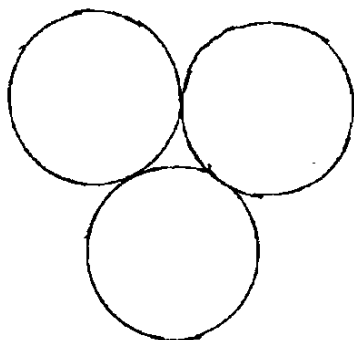
$$\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (۴)$$

بار P باید طوری وارد شود تا هر دو میله همزمان به کمانش برسند



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4/3}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \tan \theta = \frac{1}{3}$$

۶۰- شعاع زیراسیون متقطع تیر یا ستونی که از اتصال سه لوله متشابه مطابق شکل درست شده چند برابر شعاع زیراسیون هر یک از لوله‌ها می‌باشد؟ (فرض می‌شود که جداره لوله‌ها ضخامت اندکی در مقایسه با شعاع آنها داشته باشد).

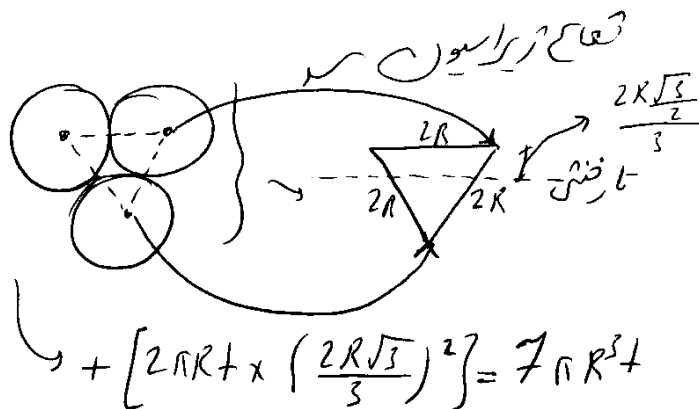


- ۱) ۱٫۵۳
- ۲) ۲٫۶۵
- ۳) ۱٫۲۹
- ۴) ۲٫۱۶

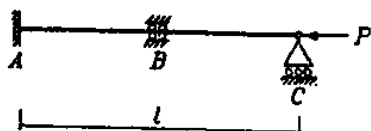
$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$I = 3(\pi R^3 t) + 2 \left[2\pi R t + x \left(\frac{R\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right]$$

$$\rightarrow r = \sqrt{\frac{7\pi R^3 t}{3(2\pi R t)}} = \sqrt{\frac{7}{6}} R$$



۶۰- در سازه زیر تکیه گاه میانی B را در چه فاصله ای از تکیه گاه A قرار دهیم تا بار بحرانی سازه ماکزیمم شود؟ (EI = const)



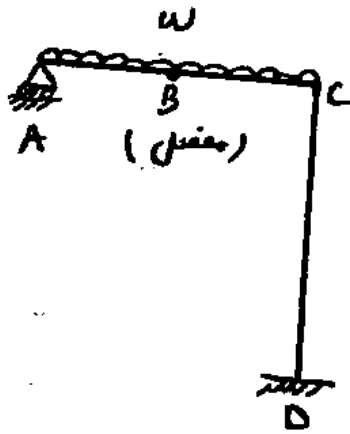
۰٫۵۸ l (۱)

۰٫۴۲ l (۳)

۰٫۱۵ l (۲)

۰٫۳۶ l (۴)

گزینه ۴

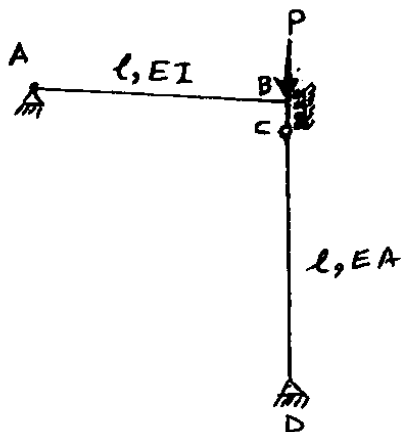


۷۰- بار گسترده بحرانی قاب زیر چقدر است؟

$(AB = BC = \frac{l}{2}, CD = l, EI = Const)$

- $\frac{16\pi^2 EI}{3l^3}$ (۱)
 $\frac{8\pi^2 EI}{3l^3}$ (۲)
 $\frac{4\pi^2 EI}{3l^3}$ (۳)
 $\frac{\pi^2 EI}{3l^3}$ (۴)

۳۰- بار بحرانی سازه زیر چقدر است؟ $(I_{AB} = 2I_{CD})$ و بار بحرانی ستون CD برابر P_E می باشد.



- P_E (۱)
 $3P_E$ (۲)
 $7P_E$ (۳)
 $5P_E$ (۴)